Mechanika ogólna

Wykład nr 10

Charakterystyki geometryczne figur płaskich.

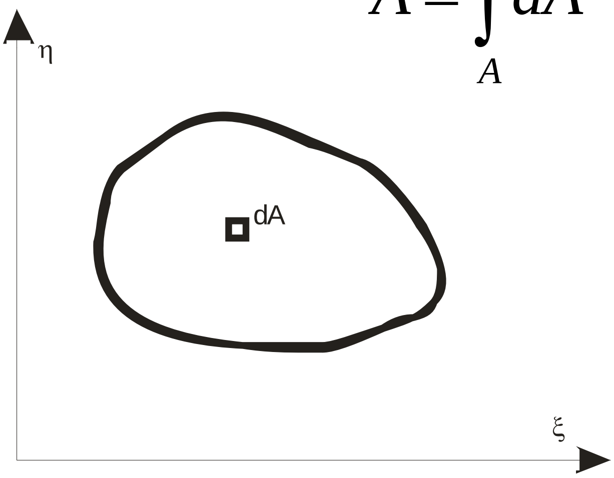
Charakterystyki geometryczne

- Pole powierzchni.
- Moment statyczny
  - współrzędne środka ciężkości.
- Moment bezwładności.
- Moment odśrodkowy
  - główne centralne osie bezwładności.

Pole powierzchni

- Pole powierzchni jako całka z pól elementarnych:

$$A = \int_A dA$$

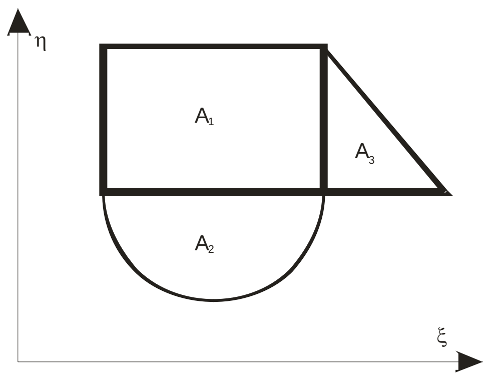


Pole powierzchni figury złożonej

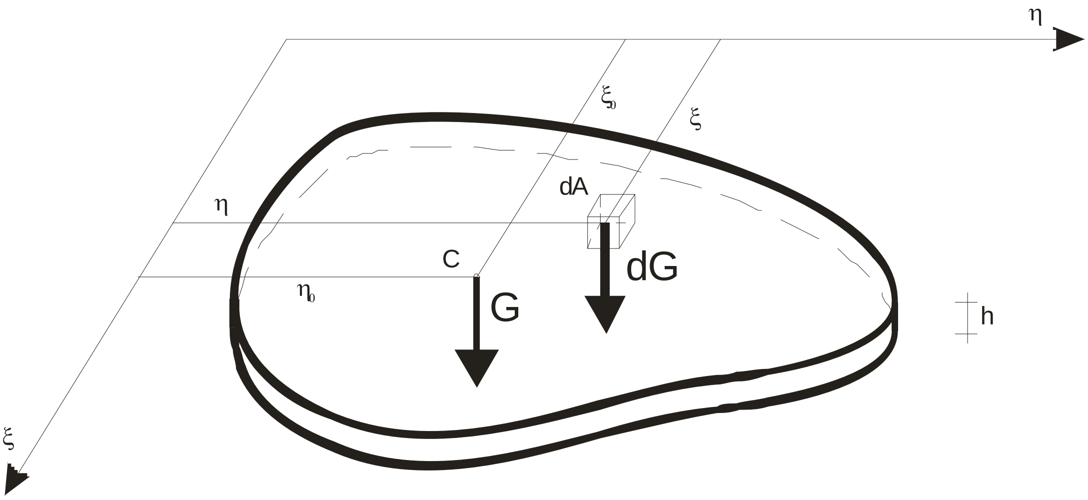
- Pole powierzchni figury złożonej z figur prostych równe jest sumie pól powierzchni figur składowych.

$$A = \int_{A_1} dA + \int_{A_2} dA + \ldots + \int_{A_n} dA =$$

$$= A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$$



Masa a pole powierzchni



$$G = \int_A \gamma h dA = \gamma h \int_A dA = \gamma h A$$

Środek ciężkości

- Moment siły wypadkowej względem osi równy jest sumie momentów sił składowych:

$$\gamma h \int_A \xi \, dA = \gamma h A \xi_0 \qquad \xi_0 = \frac{\gamma h \int_A \xi \, dA}{\gamma h A} = \frac{\int_A \xi \, dA}{A}$$

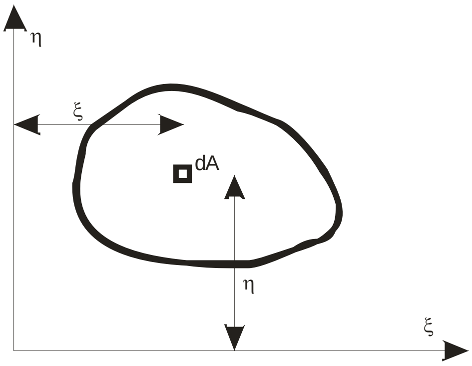
$$\gamma h \int_A \eta \, dA = \gamma h A \eta_0 \qquad \eta_0 = \frac{\gamma h \int_A \eta \, dA}{\gamma h A} = \frac{\int_A \eta \, dA}{A}$$

Moment statyczny pola względem osi (1)

- Suma iloczynów elementarnych pól powierzchni *dA* przez ich współrzędną względem osi (odległość ze znakiem), obejmująca całe pole.

$$S_\eta = \int_A \xi \, dA = A \cdot \xi_0$$

$$S_\xi = \int_A \eta \, dA = A \cdot \eta_0$$



Moment statyczny pola względem osi (2)

- Moment statyczny jest momentem rzędu pierwszego – współrzędna występuje w pierwszej potędze.
- Jednostką momentów statycznych jest jednostka długości w trzeciej potędze [m^3, cm^3, mm^3].
- Znak momentu statycznego pola może być dodatni lub ujemny.

Moment statyczny figur złożonych

- Moment statyczny figury złożonej z figur prostych równy jest sumie momentów statycznych figur prostych.

$$S_\eta = \sum_{i=1}^{n} S_\eta^{\;i} = S_\eta^{\;1} + S_\eta^{\;2} + \ldots + S_\eta^{\;n} =$$

$$= A_1 \cdot \xi_1 + A_2 \cdot \xi_2 + \ldots + A_n \cdot \xi_n = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \xi_i$$

$$S_\xi = \sum_{i=1}^{n} S_\xi^{\;i} = S_\xi^{\;1} + S_\xi^{\;2} + \ldots + S_\xi^{\;n} =$$

$$= A_1 \cdot \eta_1 + A_2 \cdot \eta_2 + \ldots + A_n \cdot \eta_n = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \eta_i$$

Współrzędne środka ciężkości

$$\xi_0 = \frac{\int_A \xi \, dA}{A} = \frac{S_\eta}{A}$$

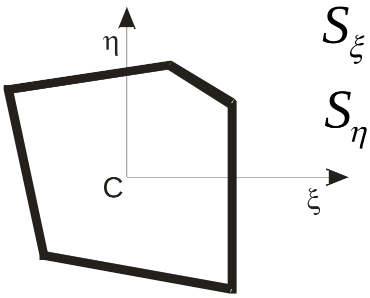
$$\xi_0 = \frac{S_\eta}{A} = \frac{A_1 \cdot \xi_1 + A_2 \cdot \xi_2 + \ldots A_n \cdot \xi_n}{A_1 + A_2 + \ldots A_n}$$

$$\eta_0 = \frac{\int_A \eta \, dA}{A} = \frac{S_\xi}{A}$$

$$\eta_0 = \frac{S_\xi}{A} = \frac{A_1 \cdot \eta_1 + A_2 \cdot \eta_2 + \ldots A_n \cdot \eta_n}{A_1 + A_2 + \ldots A_n}$$

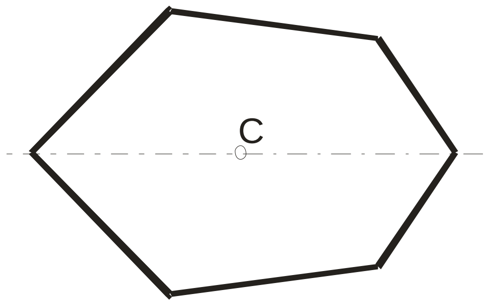
Osie środkowe (1)

- Moment statyczny pola względem osi przechodzącej przez środek ciężkości równy jest 0.
- Jeżeli figura ma oś symetrii to środek ciężkości położony jest na niej.



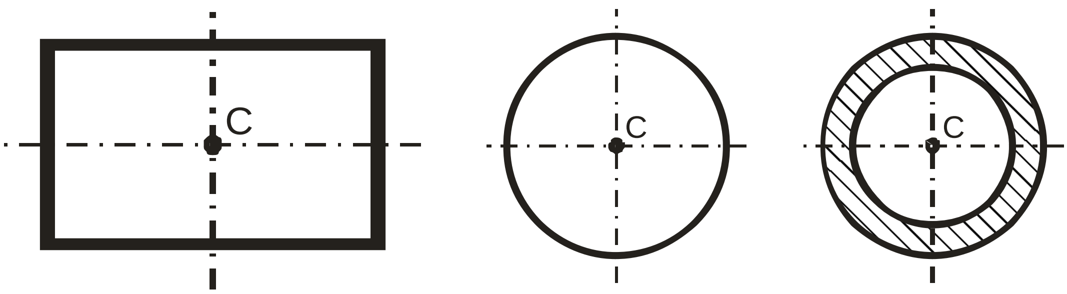
$$S_\xi = 0$$

$$S_\eta = 0$$



Osie środkowe (2)

- Jeżeli figura ma dwie osie symetrii to środek ciężkości położony jest na ich przecięciu.
- Jeżeli figura ma środek symetrii to jest on środkiem ciężkości.



Moment bezwładności pola

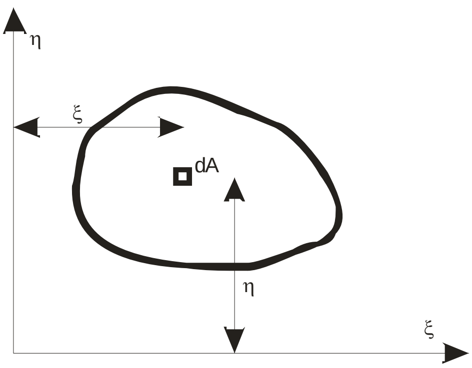
- Momenty bezwładności pola są odpowiednikiem masowych momentów bezwładności stosowanych w dynamice brył.
- Momenty bezwładności – rzędu drugiego – kwadrat współrzędnej.
- Jednostką momentu bezwładności jest jednostka długości w czwartej potędze [m^4, cm^4, mm^4].
- Moment bezwładności jest zawsze >0.

Moment bezwładności pola względem osi

- Moment bezwładności pola względem osi jest sumą iloczynów elementarnych pól *dA* przez kwadraty ich odległości od osi (współrzędne na osi prostopadłej).

$$I_\eta = \int_A \xi^2 dA$$

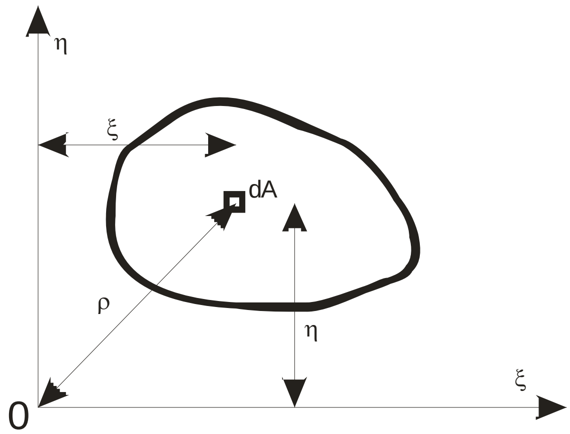
$$I_\xi = \int_A \eta^2 dA$$



Biegunowy moment bezwładności pola (1)

- Moment bezwładności pola względem punktu równy jest sumie iloczynów pól elementarnych *dA* przez kwadraty ich odległości od bieguna.

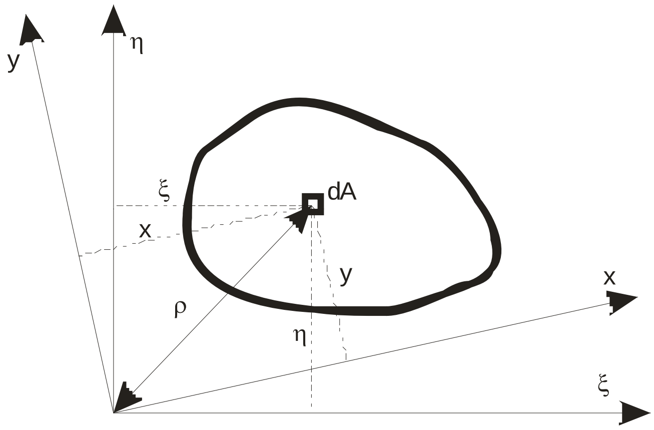
$$I_0 = \int_A \rho^2 dA$$



Biegunowy moment bezwładności pola (2)

- Suma momentów bezwładności względem dwóch osi prostokątnego układu współrzędnych o początku w biegunie jest stała i równa biegunowemu momentowi bezwładności (niezależnie od obrotu osi).

Biegunowy moment bezwładności pola (3)



$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2$$

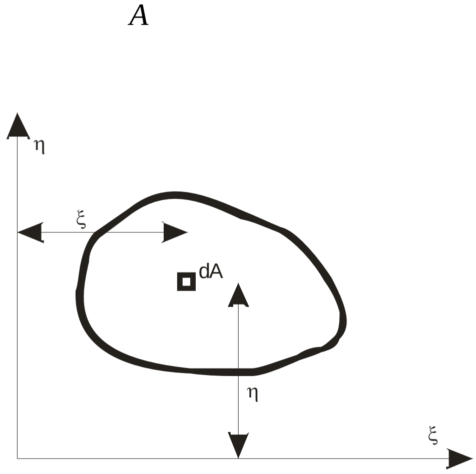
$$I_0 = \int_A \rho^2 dA = \int_A \left(\xi^2 + \eta^2\right) dA = \int_A \left(x^2 + y^2\right) dA$$

$$I_0 = \int_A \xi^2 dA + \int_A \eta^2 dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_\eta + I_\xi = I_y + I_x$$

Odśrodkowy moment bezwładności (1)

- Moment dewiacji, zboczenia.
- Suma iloczynów elementarnych pól *dA* przez iloczyn współrzędnych obejmująca całe pole.

$$I_{\xi\eta} = \int_A \eta \xi \, dA$$

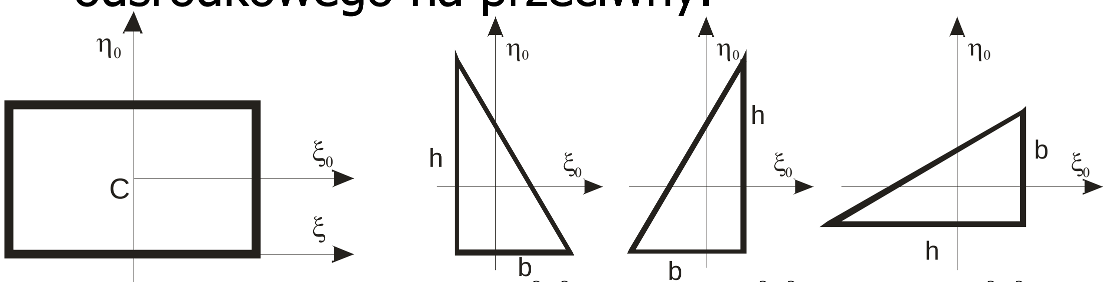


Odśrodkowy moment bezwładności (2)

- Moment rzędu drugiego – iloczyn współrzędnych.
- Jednostką odśrodkowego momentu bezwładności jest jednostka długości w czwartej potędze [m^4, cm^4, mm^4].
- Znak momentu odśrodkowego może być dodatni lub ujemny.

Odśrodkowy moment bezwładności (3)

- Moment odśrodkowy równy jest 0 jeżeli jedna z osi jest osią symetrii.
- Lustrzane odbicie figury lub obrót o 90° względem początku układu współrzędnych powoduje zmianę znaku momentu odśrodkowego na przeciwny.



$$I_{\xi_0\eta_0} = I_{\xi\eta_0} = 0 \qquad I_{\xi_0\eta_0} = -\frac{b^2h^2}{72} \qquad I_{\xi_0\eta_0} = \frac{b^2h^2}{72} \qquad I_{\xi_0\eta_0} = \frac{b^2h^2}{72}$$

Momenty bezwładności pól figur złożonych

- Moment bezwładności figury złożonej z figur prostych równy jest sumie momentów bezwładności figur prostych:
  - momenty bezwładności:

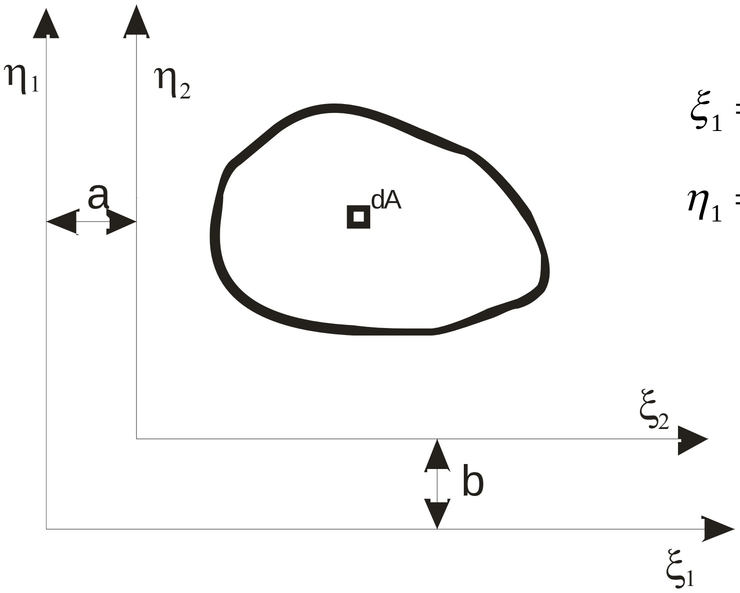
$$I_{\eta} = I_{\eta}^{1} + I_{\eta}^{2} + \ldots + I_{\eta}^{n} = \sum_{i=1}^{n} I_{\eta}^{i}$$

$$I_{\xi} = I_{\xi}^{1} + I_{\xi}^{2} + \ldots + I_{\xi}^{n} = \sum_{i=1}^{n} I_{\xi}^{n}$$

  - odśrodkowy moment bezwładności:

$$I_{\xi\eta} = I_{\xi\eta}^{1} + I_{\xi\eta}^{2} + \ldots + I_{\xi\eta}^{n} = \sum_{i=1}^{n} I_{\xi\eta}^{n}$$

Równoległe przesunięcie osi układu współrzędnych (1)



$$\xi_1 = \xi_2 + a$$

$$\eta_1 = \eta_2 + b$$

Równoległe przesunięcie osi układu współrzędnych (2)

- Momenty bezwładności:

$$I_{\eta_1} = \int_A \xi_1^2 dA = \int_A \left(\xi_2 + a\right)^2 dA = \int_A \xi_2^2 dA + 2a\int_A \xi_2 dA + a^2 \int_A dA$$

$$I_{\eta_1} = I_{\eta_2} + 2a \cdot S_{\eta_2} + a^2 A$$

$$I_{\xi_1} = \int_A \eta_1^2 dA = \int_A \left(\eta_2 + b\right)^2 dA = \int_A \eta_2^2 dA + 2b\int_A \eta_2 dA + b^2 \int_A dA$$

$$I_{\xi_1} = I_{\xi_2} + 2b \cdot S_{\xi_2} + b^2 A$$

Twierdzenie Steinera (1)

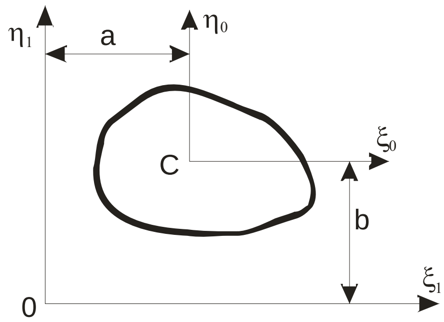
- Jeżeli osie, z których dokonujemy transformacji są osiami własnymi, czyli:

$$\xi_2 = \xi_0 \qquad \eta_2 = \eta_0$$

- Moment bezwładności względem osi równoległych do osi własnych:

$$I_{\eta_1} = I_{\eta_0} + a^2 A$$

$$I_{\xi_1} = I_{\xi_0} + b^2 A$$

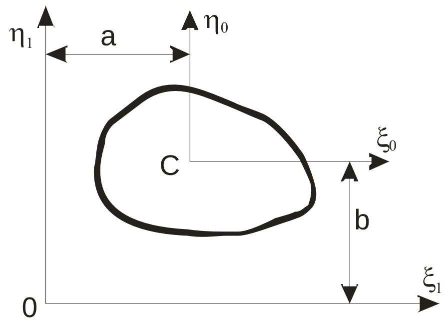


Twierdzenie Steinera (2)

- Moment bezwładności względem osi środkowych (własnych) jest najmniejszy z wszystkich momentów względem osi równoległych do osi własnych.

$$I_{\eta_0} = I_{\eta_1} - a^2 A$$

$$I_{\xi_0} = I_{\xi_1} - b^2 A$$



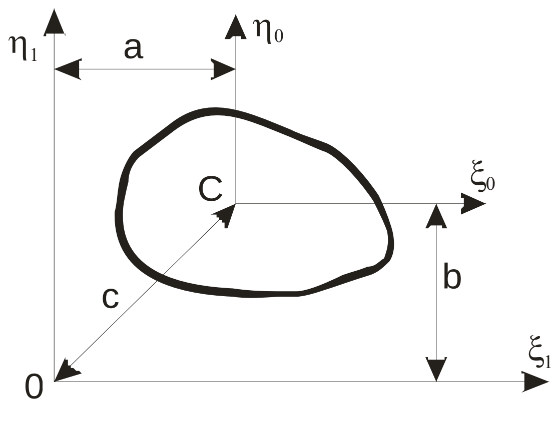
Przesunięcie bieguna

$$I_0 = \int_A \rho_1^{\,2} dA = \int_A \left(\eta_1^{\,2} + \xi_1^{\,2}\right) dA = I_{\xi_1} + I_{\eta_1}$$

$$I_0 = I_{\eta_0} + a^2 A + I_{\xi_0} + b^2 A = I_C + \left(a^2 + b^2\right) A$$

$$I_0 = I_C + c^2 A$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

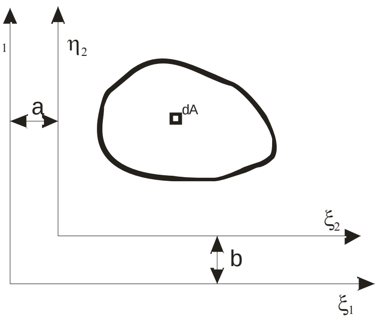


Transformacja momentów odśrodkowych

$$I_{\xi_1\eta_1} = \int_A \xi_1\eta_1 dA = \int_A (\xi_2 + a)(\eta_2 + b)\, dA =$$

$$= \int_A \eta_2\xi_2 dA + b\int_A \xi_2 dA + a\int_A \eta_2 dA + ab\int_A dA$$

$$I_{\eta_1\xi_1} = I_{\eta_2\xi_2} + b\cdot S_{\eta_2} + a\cdot S_{\xi_2} + abA$$



Twierdzenie Steinera dla momentów odśrodkowych

- Jeżeli osie, z których dokonujemy transformacji są osiami własnymi, czyli:

  $\xi_2 = \xi_0 \qquad \eta_2 = \eta_0$

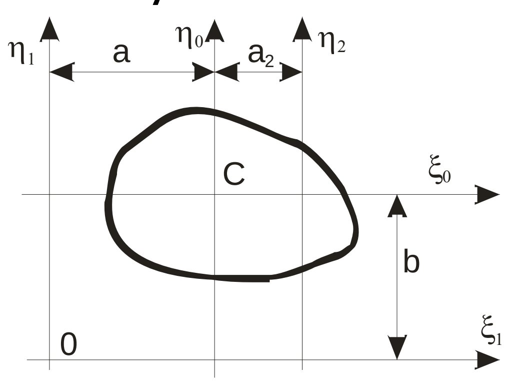
- Moment odśrodkowy względem osi równoległych do osi własnych:

$$I_{\xi_1\eta_1} = I_{\xi_0\eta_0} + abA$$

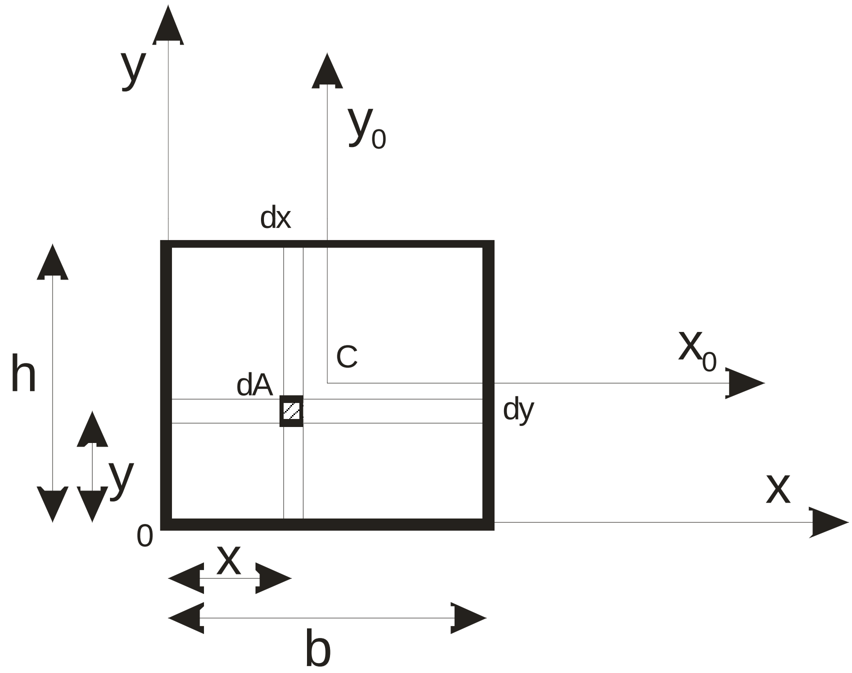
$$a > 0, b > 0$$

$$I_{\xi_1\eta_2} = I_{\xi_0\eta_0} + a_2 bA$$

$$a_2 < 0, b > 0$$



Przykład (1)

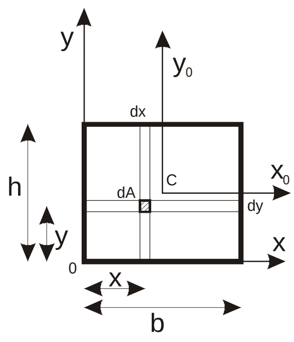


Przykład (2)

- Momenty bezwładności względem osi przechodzących przez boki prostokąta:

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h \int_0^b y^2 dx\, dy = \int_0^h y^2 \, x\Big|_0^b dy = \int_0^h y^2 b\, dy = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_0^b \int_0^h x^2 dy\, dx = \int_0^b x^2 \, y\Big|_0^h dx = \int_0^b x^2 h\, dx = \frac{hb^3}{3}$$



$$I_0 = I_x + I_y = \frac{bh}{3}\left(h^2 + b^2\right)$$

$$I_{xy} = \int_A xy dA = \int_0^h \int_0^b xy\, dx\, dy = \int_0^h y \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^b dy = \frac{b^2}{2} \int_0^h y\, dy = \frac{b^2}{2} \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^h = \frac{b^2 h^2}{4}$$

Przykład (3)

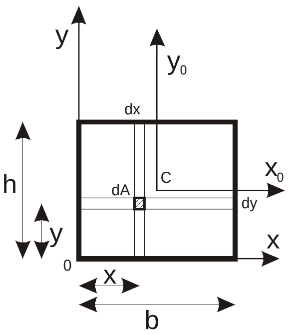
- Momenty bezwładności względem osi własnych – nowe granice całkowania:

$$I_{x_0} = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dx\, dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2\, x\Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b\, dy = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{y_0} = \int_A x^2 dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^2 dy\, dx = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2\, y\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dx = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 h\, dx = \frac{hb^3}{12}$$

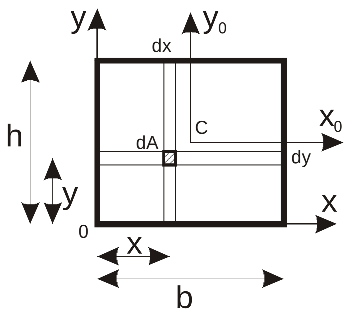
$$I_C = I_{x_0} + I_{y_0} = \frac{bh}{12}\left(h^2 + b^2\right)$$

$$I_{x_0 y_0} = \int_A xy dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} xy\, dx\, dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy = 0 \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y\, dy = 0 \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = 0$$



Przykład (4)

- Momenty bezwładności względem osi własnych – z tw. Steinera:



$$I_{x_0} = I_x - A\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{3} - bh\frac{h^2}{4} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{y_0} = I_y - A\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{hb^3}{3} - bh\frac{b^2}{4} = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_C = \frac{bh}{3}\left(h^2 + b^2\right) - bh\left(\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) = \frac{bh^3}{3} + \frac{hb^3}{3} - \frac{bh^3}{4} - \frac{hb^3}{4} = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12}$$

$$I_{x_0 y_0} = \frac{b^2 h^2}{4} - bh\frac{h}{2}\frac{b}{2} = 0$$