Mechanika ogólna

Wykład nr 11

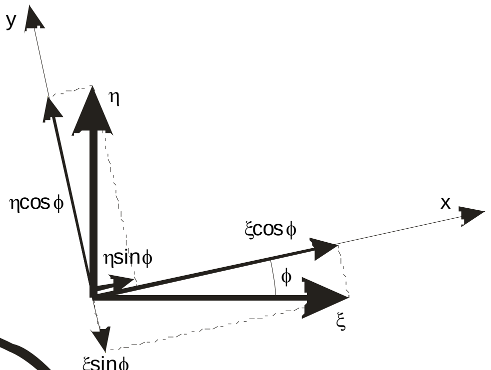
Główne centralne osie bezwładności.

Charakterystyki geometryczne figur płaskich – przykłady.

Obrót układu współrzędnych (1)

$$x = \xi \cos\phi + \eta \sin\phi$$

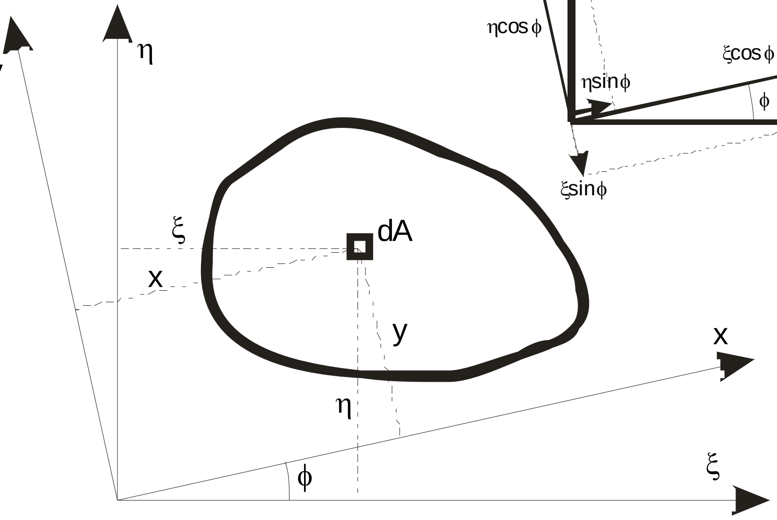
$$y = -\xi \sin\phi + \eta \cos\phi$$



$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$



Obrót układu współrzędnych (2)

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A \left(-\xi \sin\phi + \eta \cos\phi\right)^2 dA =$$

$$= \int_A \xi^2 \sin^2 \phi dA - 2\int_A \xi\eta \sin\phi \cos\phi dA + \int_A \eta^2 \cos^2 \phi dA =$$

$$= I_\eta \sin^2 \phi + I_\xi \cos^2 \phi - 2 I_{\xi\eta} \sin\phi \cos\phi$$

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_A \left(\xi \cos\phi + \eta \sin\phi\right)^2 dA =$$

$$= \int_A \xi^2 \cos^2 \phi dA + 2\int_A \xi\eta \sin\phi \cos\phi dA + \int_A \eta^2 \sin^2 \phi dA =$$

$$= I_\eta \cos^2 \phi + I_\xi \sin^2 \phi + 2 I_{\xi\eta} \sin\phi \cos\phi$$

Obrót układu współrzędnych (3)

$$I_{xy} = \int_A xy\, dA = \int_A \left(-\xi \sin\phi + \eta \cos\phi\right)\left(\xi \cos\phi + \eta \sin\phi\right) dA =$$

$$= \int_A \xi\eta \cos^2 \phi dA - \int_A \xi^2 \sin\phi \cos\phi dA +$$

$$+ \int_A \eta^2 \sin\phi \cos\phi dA - \int_A \xi\eta \sin^2 \phi dA =$$

$$= \left(I_\xi - I_\eta\right) \sin\phi \cos\phi + I_{\xi\eta} \left(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi\right)$$

Obrót układu współrzędnych (4)

$$\sin^2\phi = \frac{1-\cos 2\phi}{2} \qquad \cos^2\phi = \frac{1+\cos 2\phi}{2}$$

$$2\sin\phi\cos\phi = \sin 2\phi$$

$$I_x = \frac{1}{2}\left(I_\xi + I_\eta\right) + \frac{1}{2}\left(I_\xi - I_\eta\right)\cos 2\phi - I_{\xi\eta}\sin 2\phi$$

$$I_y = \frac{1}{2}\left(I_\xi + I_\eta\right) - \frac{1}{2}\left(I_\xi - I_\eta\right)\cos 2\phi + I_{\xi\eta}\sin 2\phi$$

$$I_{xy} = \frac{1}{2}\left(I_\xi - I_\eta\right)\sin 2\phi + I_{\xi\eta}\cos 2\phi$$

Warunek

- Zerowanie się momentu odśrodkowego:

$$I_{xy} = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(I_\xi - I_\eta\right)\sin 2\phi_0 + I_{\xi\eta}\cos 2\phi_0 = 0$$

- Kąt obrotu osi:

$$\mathrm{tg}2\phi_0 = \frac{-2I_{\xi\eta}}{I_\xi - I_\eta} = \frac{2I_{\xi\eta}}{I_\eta - I_\xi}$$

Warunek występowania ekstremum

$$\frac{dI_x}{d\phi} = -\left(I_\xi - I_\eta\right)\sin 2\phi - 2I_{\xi\eta}\cos 2\phi_0 = -2I_{\eta\xi}$$

$$\frac{dI_y}{d\phi} = \left(I_\xi - I_\eta\right)\sin 2\phi + 2I_{\xi\eta}\cos 2\phi_0 = 2I_{\eta\xi}$$

$$\phi = \phi_0 \qquad \frac{dI_x}{d\phi} = -2I_{xy} = 0 \qquad \frac{dI_y}{d\phi} = 2I_{xy} = 0$$

$I_{xy} = 0$ $\quad I_x, I_y$ ekstremalne

Ekstremalne wartości momentów bezwładności

$$\mathrm{tg}2\phi_0 = \frac{-2I_{\eta\xi}}{I_\xi - I_\eta} \qquad \cos 2\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 2\phi_0}} = \frac{I_\xi - I_\eta}{\sqrt{\left(I_\xi - I_\eta\right)^2 + 4I_{\eta\xi}^{\ 2}}}$$

$$\sin 2\phi_0 = \frac{\mathrm{tg}2\phi_0}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 2\phi_0}} = \frac{-2I_{\eta\xi}}{\sqrt{\left(I_\xi - I_\eta\right)^2 + 4I_{\eta\xi}^{\ 2}}}$$

$$I_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{I_\xi + I_\eta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_\xi - I_\eta}{2}\right)^2 + I_{\xi\eta}^{\ 2}}$$

Główne centralne osie bezwładności

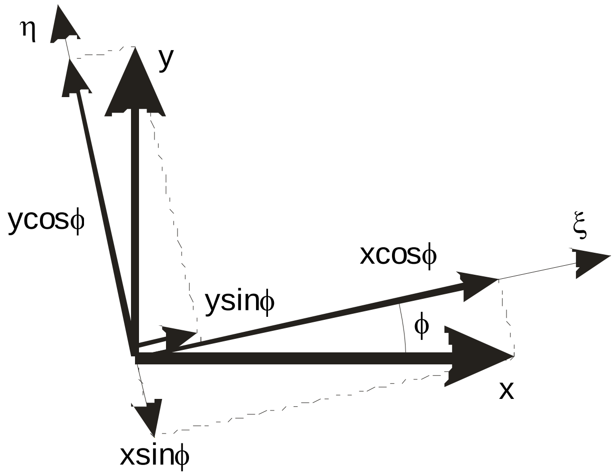
- Osie wzajemnie prostopadłe względem których moment odśrodkowy równy jest 0 to osie główne bezwładności. Jeżeli są one osiami środkowymi, to są to **główne centralne osie bezwładności**.

$$I_{xy} = 0 \qquad I_x, I_y = \max \quad \vee \quad \min$$

Obrót z osi głównych na dowolne

$$\xi = x\cos\phi + y\sin\phi$$

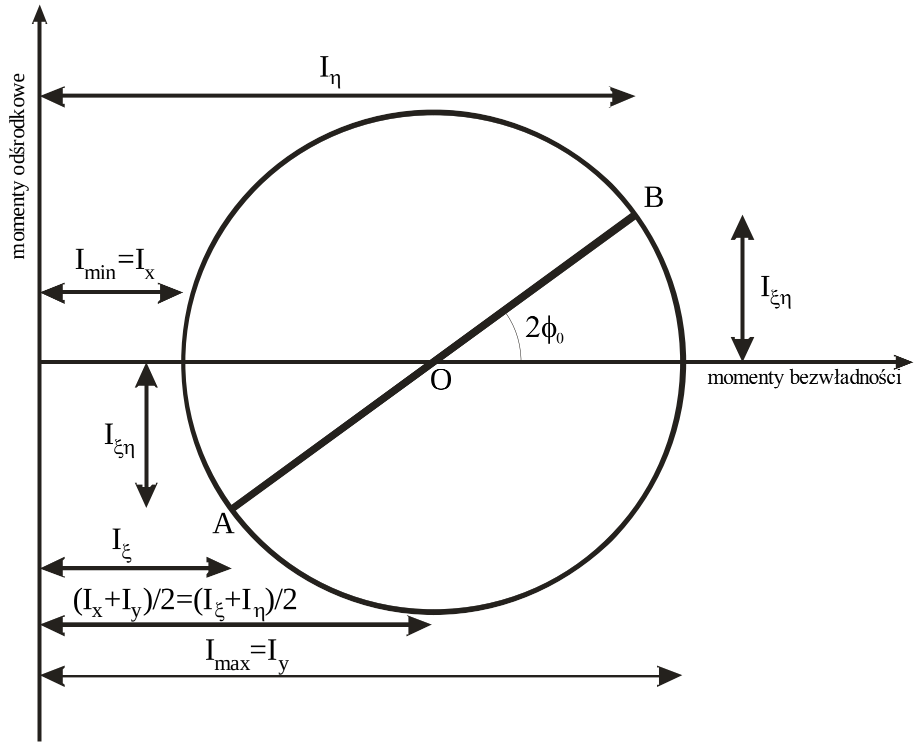
$$\eta = -x\sin\phi + y\cos\phi$$



$$I_\xi = I_y\sin^2\phi + I_x\cos^2\phi - 2I_{xy}\sin\phi\cos\phi = I_y\sin^2\phi + I_x\cos^2\phi$$

$$I_\eta = I_y\cos^2\phi + I_x\sin^2\phi + 2I_{xy}\sin\phi\cos\phi = I_y\cos^2\phi + I_x\sin^2\phi$$

Koło Mohra (1)



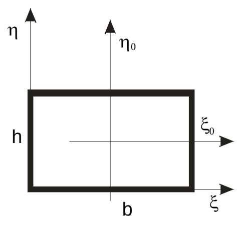
Koło Mohra (2)

- Etapy graficznego wyznaczania momentów bezwładności względem środkowych osi głównych:
  - zaznaczenie na układzie współrzędnych punktów : A(J_{ξ} , -$J_{\xi\eta}$) i B(J_{η} , $J_{\xi\eta}$);
  - zaznaczenie środka okręgu O jako punktu przecięcia osi rzędnych i linii łączącej punkty AB;
  - wyrysowanie okręgu o promieniu OA.

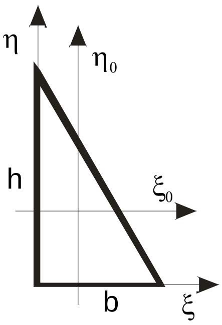
Koło Mohra (3)

- Punkty przecięcia okręgu i osi rzędnych wyznaczają wartości ekstremalnych momentów bezwładności względem środkowych osi głównych.
- Kąt pomiędzy osią rzędnych; a linią AB jest równy $2\phi_o$.
- Układ współrzędnych obracamy o kąt ϕ_o przeciwnie do wskazówek zegara.

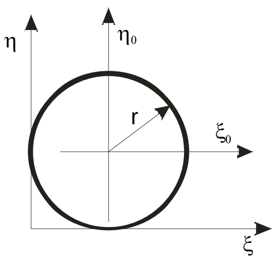
Wzory (1)

Figura, pole powierzchni	Współrzędne środka ciężkości w układzie $\xi\eta$	Momenty bezwładności	Momenty odśrodkowe
Prostokąt  $A = bh$	$\xi = \frac{b}{2}$ $\eta = \frac{h}{2}$	$I_\xi = \frac{bh^3}{3}$ $I_\eta = \frac{hb^3}{3}$ $I_{\xi 0} = \frac{bh^3}{12}$ $I_{\eta 0} = \frac{hb^3}{12}$	$I_{\xi\eta} = \frac{b^2h^2}{4}$ $I_{\xi 0\eta 0} = 0$

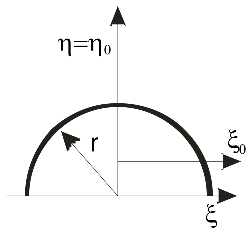
Wzory (2)

Figura, pole powierzchni	Współrzędne środka ciężkości w układzie $\xi\eta$	Momenty bezwładności	Momenty odśrodkowe
Trójkąt prostokątny  $A=\frac{bh}{2}$	$\xi=\frac{b}{3}$ $\eta=\frac{h}{3}$	$I_\xi=\frac{bh^3}{12}$ $I_\eta=\frac{hb^3}{12}$ $I_{\xi_0}=\frac{bh^3}{36}$ $I_{\eta_0}=\frac{hb^3}{36}$	$I_{\xi\eta}=\frac{b^2h^2}{24}$ $I_{\xi_0\eta_0}=-\frac{b^2h^2}{72}$

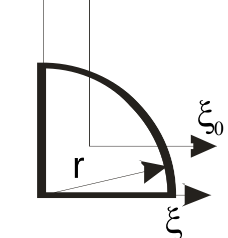
Wzory (3)

Figura, pole powierzchni	Współrzędne środka ciężkości w układzie $\xi\eta$	Momenty bezwładności	Momenty odśrodkowe
Koło  $d=2r$ $A=\pi r^2=\frac{\pi d^2}{4}$	$\xi=r=\frac{d}{2}$ $\eta=r=\frac{d}{2}$	$I_\xi=\frac{5}{4}\pi r^4=\frac{5}{64}\pi d^4$ $I_\eta=\frac{5}{4}\pi r^4=\frac{5}{64}\pi d^4$ $I_{\xi_0}=\frac{\pi r^4}{4}=\frac{\pi d^4}{64}$ $I_{\eta_0}=\frac{\pi r^4}{4}=\frac{\pi d^4}{64}$ $I_C=\frac{\pi r^4}{2}=\frac{\pi d^4}{32}$	$I_{\xi\eta}=\pi r^4=\frac{\pi d^4}{16}$ $I_{\xi_0\eta_0}=0$

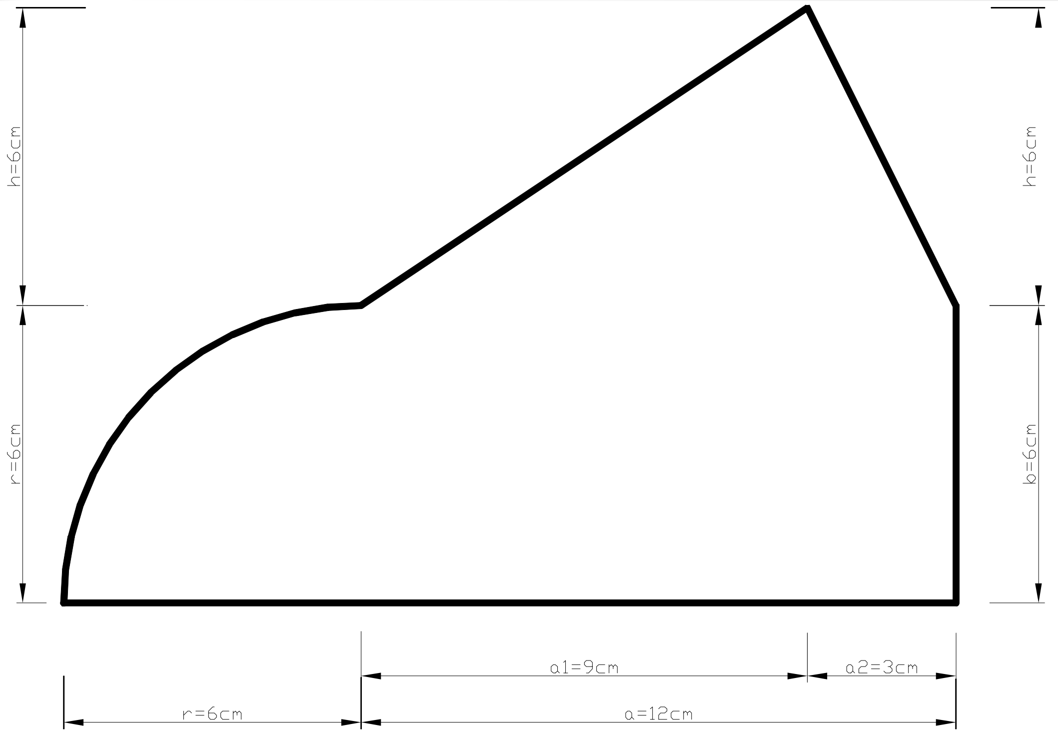
Wzory (4)

Figura, pole powierzchni	Współrzędne środka ciężkości w układzie $\xi\eta$	Momenty bezwładności	Momenty odśrodkowe
Półkole  $d = 2r$ $A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi d^2}{8}$	$\xi = 0$ $\eta = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi} = 0,4244r$	$I_\xi = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{\pi d^4}{128}$ $I_\eta = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{\pi d^4}{128}$ $I_{\xi_0} = r^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) =$ $= 0,1098r^4$ $I_{\eta_0} = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{\pi d^4}{128}$	$I_{\xi\eta} = 0$ $I_{\xi_0\eta_0} = 0$

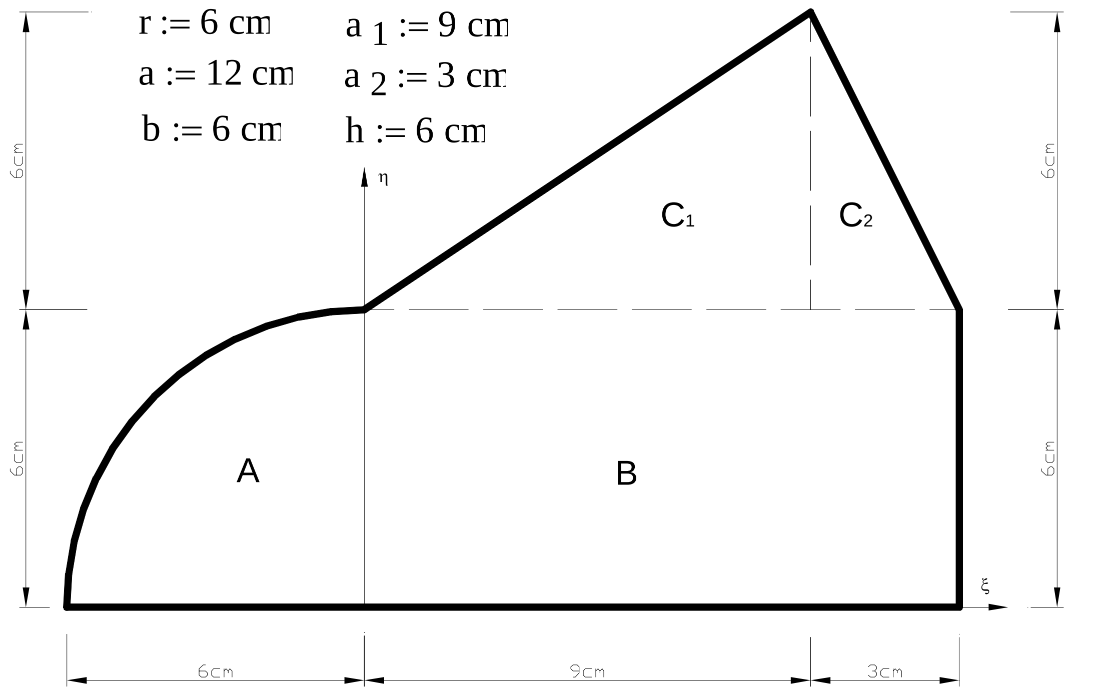
Wzory (5)

Figura, pole powierzchni	Współrzędne środka ciężkości w układzie $\xi\eta$	Momenty bezwładności	Momenty odśrodkowe
Ćwiartka koła  $d = 2r$ $A = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi d^2}{16}$	$\xi = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi} = 0,4244r$ $\eta = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi} = 0,4244r$	$I_\xi = \frac{\pi r^4}{16} = \frac{\pi d^4}{256}$ $I_\eta = \frac{\pi r^4}{16} = \frac{\pi d^4}{256}$ $I_{\xi_0} = \frac{r^4}{2}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) =$ $= 0,0549r^4$ $I_{\eta_0} = \frac{r^4}{2}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) =$ $= 0,0549r^4$	$I_{\xi\eta} = \frac{r^4}{8}$ $I_{\xi_0\eta_0} = \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi}\right)r^4 =$ $= -0,0165r^4$

Przykład 1



Podział na figury proste



Pole powierzchni

$A_A = \frac{\pi \cdot r^2}{4}$ $\quad A_A = 2.827\times 10^{-3}\,m^2$ $\quad A_A = 28.274\,cm^2$

$A_B = a \cdot b$ $\quad A_B = 7.200\times 10^{-3}\,m^2$ $\quad A_B = 72\,cm^2$

$A_{C1} = \frac{1}{2}a_1 \cdot h$ $\quad A_{C1} = 2.700\times 10^{-3}\,m^2$ $\quad A_{C1} = 27\,cm^2$

$A_{C2} = \frac{1}{2}a_2 \cdot h$ $\quad A_{C2} = 9.000\times 10^{-4}\,m^2$ $\quad A_{C2} = 9\,cm^2$

$$A = A_A + A_B + A_{C1} + A_{C2}$$

$A = 136.274\,cm^2$ $\quad A = 1.363\times 10^{-2}\,m^2$

Momenty statyczne (1)

$S_{A\xi} = A_A \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}$ $\quad S_{A\xi} = 72\,cm^3$ $\quad S_{A\xi} = 7.200\times 10^{-5}\,m^3$

$S_{B\xi} = A_B \cdot \frac{1}{2} \cdot b$ $\quad S_{B\xi} = 216\,cm^3$ $\quad S_{B\xi} = 2.160\times 10^{-4}\,m^3$

$S_{C1\xi} = A_{C1} \cdot \left(b + \frac{1}{3} \cdot h\right)$ $\quad S_{C1\xi} = 216\,cm^3$ $\quad S_{C1\xi} = 2.160\times 10^{-4}\,m^3$

$S_{C2\xi} = A_{C2} \cdot \left(b + \frac{1}{3} \cdot h\right)$ $\quad S_{C2\xi} = 72\,cm^3$ $\quad S_{C2\xi} = 7.200\times 10^{-5}\,m^3$

$$S_\xi = S_{A\xi} + S_{B\xi} + S_{C1\xi} + S_{C2\xi}$$

$S_\xi = 576\,cm^3$ $\quad S_\xi = 5.760\times 10^{-4}\,m^3$

Momenty statyczne (2)

$$S_{A\eta} = A_A \cdot \left(-\frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}\right) \qquad S_{A\eta} = -72\,cm^3 \qquad S_{A\eta} = -7.200 \times 10^{-5}\,m^3$$

$$S_{B\eta} = A_B \cdot \frac{1}{2} \cdot a \qquad S_{B\eta} = 432\,cm^3 \qquad S_{B\eta} = 4.320 \times 10^{-4}\,m^3$$

$$S_{C1\eta} = A_{C1} \cdot \frac{2}{3} \cdot a_1 \qquad S_{C1\eta} = 162\,cm^3 \qquad S_{C1\eta} = 1.620 \times 10^{-4}\,m^3$$

$$S_{C2\eta} = A_{C2} \cdot \left(a_1 + \frac{1}{3} \cdot a_2\right) \qquad S_{C2\eta} = 90\,cm^3 \qquad S_{C2\eta} = 9.000 \times 10^{-5}\,m^3$$

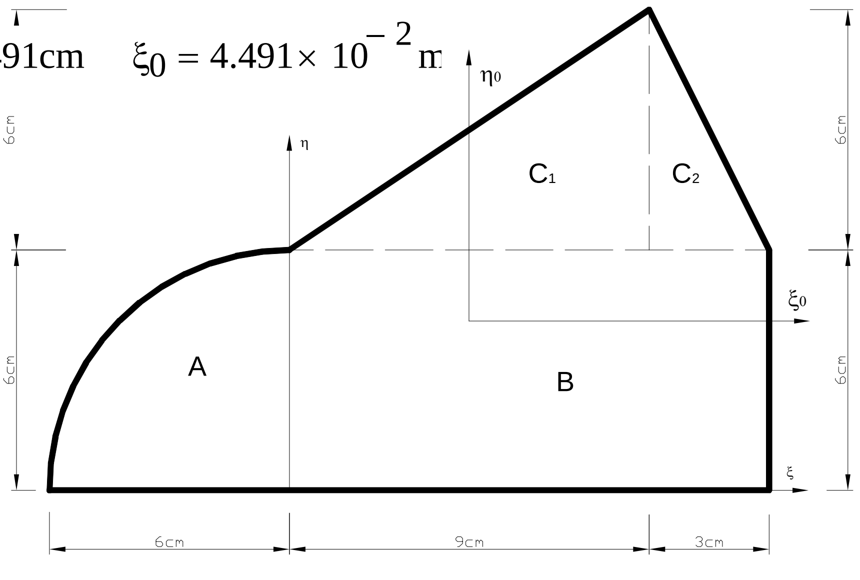
$$S_\eta = S_{A\eta} + S_{B\eta} + S_{C1\eta} + S_{C2\eta}$$

$$S_\eta = 612\,cm^3 \qquad S_\eta = 6.120 \times 10^{-4}\,m^3$$

Współrzędne środka ciężkości

$$\eta_0 = \frac{S_\xi}{A} \qquad \eta_0 = 4.227\,cm \qquad \eta_0 = 0.042\,m$$

$$\xi_0 = \frac{S_\eta}{A} \qquad \xi_0 = 4.491\,cm \qquad \xi_0 = 4.491 \times 10^{-2}\,m$$



Warianty transformacji momentów bezwładności

- Wariant A
  - Transformacja z osi własnych każdej z figur składowych do osi dowolnych, a następnie z tych osi dowolnych do osi własnych całej figury złożonej.
- Wariant B
  - Transformacja z osi własnych każdej z figur składowych do osi własnych całej figury złożonej, które dla każdej z figur prostych są dowolnymi (nie przechodzą przez ich środki ciężkości).

Wariant A Momenty bezwładności (1)

$$I_{A\xi} = \frac{\pi \cdot r^4}{16} \qquad I_{A\xi} = 254.469\,cm^4 \qquad I_{A\xi} = 2.545 \times 10^{-6}\,m^4$$

$$I_{B\xi} = \frac{a \cdot b^3}{3} \qquad I_{B\xi} = 864\,cm^4 \qquad I_{B\xi} = 8.640 \times 10^{-6}\,m^4$$

$$I_{C1\xi} = \frac{a_1 \cdot h^3}{36} + A_{C1} \cdot \left(b + \frac{1}{3} \cdot h\right)^2 \qquad I_{C1\xi} = 1782\,cm^4 \qquad I_{C1\xi} = 1.782 \times 10^{-5}\,m^4$$

$$I_{C2\xi} = \frac{a_2 \cdot h^3}{36} + A_{C2} \cdot \left(b + \frac{1}{3} \cdot h\right)^2 \qquad I_{C2\xi} = 594\,cm^4 \qquad I_{C2\xi} = 5.940 \times 10^{-6}\,m^4$$

$$I_{\xi} = I_{A\xi} + I_{B\xi} + I_{C1\xi} + I_{C2\xi} \qquad I_{\xi} = 3494.469\,cm^4 \qquad I_{\xi} = 3.494 \times 10^{-5}\,m^4$$

Wariant A
Momenty bezwładności (2)

$$I_{A\eta} = \frac{\pi \cdot r^4}{16} \qquad I_{A\eta} = 254.469\,cm^4 \qquad I_{A\eta} = 2.545\times 10^{-6}\,m^4$$

$$I_{B\eta} = \frac{a^3 \cdot b}{3} \qquad I_{B\eta} = 3456\,cm^4 \qquad I_{B\eta} = 3.456\times 10^{-5}\,m^4$$

$$I_{C1\eta} = \frac{a_1{}^3 \cdot h}{36} + A_{C1} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot a_1\right)^2 \qquad I_{C1\eta} = 1093.5\,cm^4 \qquad I_{C1\eta} = 1.093\times 10^{-5}\,m^4$$

$$I_{C2\eta} = \frac{a_2{}^3 \cdot h}{36} + A_{C2} \cdot \left(a_1 + \frac{1}{3} \cdot a_2\right)^2 \qquad I_{C2\eta} = 904.5\,cm^4 \qquad I_{C2\eta} = 9.045\times 10^{-6}\,m^4$$

$$I_{\eta} = I_{A\eta} + I_{B\eta} + I_{C1\eta} + I_{C2\eta} \qquad I_{\eta} = 5708.469\,cm^4 \qquad I_{\eta} = 5.708\times 10^{-5}\,m^4$$

Wariant A
Momenty odśrodkowe (2)

$$I_{A\xi\eta} = -\frac{r^4}{8} \qquad I_{A\xi\eta} = -162\,cm^4 \qquad I_{A\xi\eta} = -1.620\times 10^{-6}\,m^4$$

$$I_{B\xi\eta} = \frac{a^2 \cdot b^2}{4} \qquad I_{B\xi\eta} = 1296\,cm^4 \qquad I_{B\xi\eta} = 1.296\times 10^{-5}\,m^4$$

$$I_{C1\xi\eta} = \frac{a_1{}^2 \cdot h^2}{72} + A_{C1} \cdot \frac{2}{3} a_1 \cdot \left(b + \frac{1}{3}h\right) \qquad I_{C1\xi\eta} = 1336.5\,cm^4 \qquad I_{C1\xi\eta} = 1.336\times 10^{-5}\,m^4$$

$$I_{C2\xi\eta} = -\frac{a_2{}^2 \cdot h^2}{72} + A_{C2} \cdot \left(a_1 + \frac{1}{3}a_2\right) \cdot \left(b + \frac{1}{3}h\right) \qquad I_{C2\xi\eta} = 715.5\,cm^4 \qquad I_{C2\xi\eta} = 7.155\times 10^{-6}\,m^4$$

$$I_{\xi\eta} = I_{A\xi\eta} + I_{B\xi\eta} + I_{C1\xi\eta} + I_{C2\xi\eta} \qquad I_{\xi\eta} = 3186\,cm^4 \qquad I_{\xi\eta} = 3.186\times 10^{-5}\,m^4$$

Momenty bezwładności względem osi własnych

$I_{\xi 0} = I_{\xi} - A \cdot \eta_0^2$ $\quad I_{\xi 0} = 1059.851\,cm^4$ $\quad I_{\xi 0} = 1.060 \times 10^{-5}\,m^4$

$I_{\eta 0} = I_{\eta} - A \cdot \xi_0^2$ $\quad I_{\eta 0} = 2960.013\,cm^4$ $\quad I_{\eta 0} = 2.960 \times 10^{-5}\,m^4$

$I_{\xi 0 \eta 0} = I_{\xi \eta} - A \cdot \xi_0 \cdot \eta_0$ $\quad I_{\xi 0 \eta 0} = 599.218\,cm^4$ $\quad I_{\xi 0 \eta 0} = 5.992 \times 10^{-6}\,m^4$

Wariant B Momenty bezwładności (1)

$$I_{A\xi 0} = \frac{r^4}{2}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) + A_A \cdot \left(\eta_0 - \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)^2 \quad I_{A\xi 0} = 150.951\,cm^4 \quad I_{A\xi 0} = 2.545 \times 10^{-6}\,m^4$$

$$I_{B\xi 0} = \frac{a \cdot b^3}{12} + A_B \cdot \left(\eta_0 - \frac{b}{2}\right)^2 \quad I_{B\xi 0} = 324.357\,cm^4 \quad I_{B\xi 0} = 3.244 \times 10^{-6}\,m^4$$

$$I_{C1\xi 0} = \frac{a_1 \cdot h^3}{36} + A_{C1} \cdot \left[\eta_0 - \left(b + \frac{1}{3} \cdot h\right)\right]^2 \quad I_{C1\xi 0} = 438.407\,cm^4 \quad I_{C1\xi 0} = 4.384 \times 10^{-6}\,m^4$$

$$I_{C2\xi 0} = \frac{a_2 \cdot h^3}{36} + A_{C2} \cdot \left[\eta_0 - \left(b + \frac{1}{3} \cdot h\right)\right]^2 \quad I_{C2\xi 0} = 146.136\,cm^4 \quad I_{C2\xi 0} = 1.461 \times 10^{-6}\,m^4$$

$I_{\xi 0} = I_{A\xi 0} + I_{B\xi 0} + I_{C1\xi 0} + I_{C2\xi 0}$ $\quad I_{\xi 0} = 1059.851\,cm^4$ $\quad I_{\xi 0} = 1.060 \times 10^{-5}\,m^4$

Wariant B
Momenty bezwładności (2)

$$I_{A\eta 0} = \frac{r^4}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\cdot\pi}\right) + A_A\cdot\left[\xi_0-\left(-\frac{4}{3}\cdot\frac{r}{\pi}\right)\right]^2 \qquad I_{A\eta 0} = 1471.417\,cm^4 \qquad I_{A\eta 0} = 1.471\times 10^{-5}\,m^4$$

$$I_{B\eta 0} = \frac{a^3\cdot b}{12} + A_B\cdot\left(\xi_0-\frac{a}{2}\right)^2 \qquad I_{B\eta 0} = 1027.963\,cm^4 \qquad I_{B\eta 0} = 1.028\times 10^{-5}\,m^4$$

$$I_{C1\eta 0} = \frac{{a_1}^3\cdot h}{36} + A_{C1}\cdot\left(\xi_0-\frac{2}{3}a_1\right)^2 \qquad I_{C1\eta 0} = 182.986\,cm^4 \qquad I_{C1\eta 0} = 1.830\times 10^{-6}\,m^4$$

$$I_{C2\eta 0} = \frac{{a_2}^3\cdot h}{36} + A_{C2}\cdot\left[\xi_0-\left(a_1+\frac{1}{3}\cdot a_2\right)\right]^2 \qquad I_{C2\eta 0} = 277.648\,cm^4 \qquad I_{C2\eta 0} = 2.776\times 10^{-6}\,m^4$$

$$I_{\eta 0} = I_{A\eta 0} + I_{B\eta 0} + I_{C1\eta 0} + I_{C2\eta 0} \qquad I_{\eta 0} = 2960.013\,cm^4 \qquad I_{\eta 0} = 2.960\times 10^{-5}\,m^4$$

Wariant B
Momenty odśrodkowe

$$I_{A\xi 0\eta 0} = -\left(\frac{1}{8}-\frac{4}{9\pi}\right)r^4 + A_A\cdot\left(\eta_0-\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)\cdot\left[\xi_0-\left(-\frac{4}{3}\cdot\frac{r}{\pi}\right)\right]$$

$$I_{A\xi 0\eta 0} = 355.688\,cm^4 \qquad I_{A\xi 0\eta 0} = 3.557\times 10^{-6}\,m^4$$

$$I_{B\xi 0\eta 0} = 0 + A_B\cdot\left(\eta_0-\frac{b}{2}\right)\cdot\left(\xi_0-\frac{a}{2}\right) \qquad I_{B\xi 0\eta 0} = -133.291\,cm^4 \qquad I_{B\xi 0\eta 0} = -1.333\times 10^{-6}\,m^4$$

$$I_{C1\xi 0\eta 0} = \frac{{a_1}^2\cdot h^2}{72} + A_{C1}\cdot\left[\eta_0-\left(b+\frac{1}{3}\cdot h\right)\right]\cdot\left(\xi_0-\frac{2}{3}a_1\right)$$

$$I_{C1\xi 0\eta 0} = 194.239\,cm^4 \qquad I_{C1\xi 0\eta 0} = 1.942\times 10^{-6}\,m^4$$

$$I_{C2\xi 0\eta 0} = -\frac{{a_2}^2\cdot h^2}{72} + A_{C2}\cdot\left[\eta_0-\left(b+\frac{1}{3}\cdot h\right)\right]\cdot\left[\xi_0-\left(a_1+\frac{1}{3}\cdot a_2\right)\right]$$

$$I_{C2\xi 0\eta 0} = 182.583\,cm^4 \qquad I_{C2\xi 0\eta 0} = 1.826\times 10^{-6}\,m^4$$

$$I_{\xi 0\eta 0} = I_{A\xi 0\eta 0} + I_{B\xi 0\eta 0} + I_{C1\xi 0\eta 0} + I_{C2\xi 0\eta 0} \qquad I_{\xi 0\eta 0} = 599.218\,cm^4 \qquad I_{\xi 0\eta 0} = 5.992\times 10^{-6}\,m^4$$

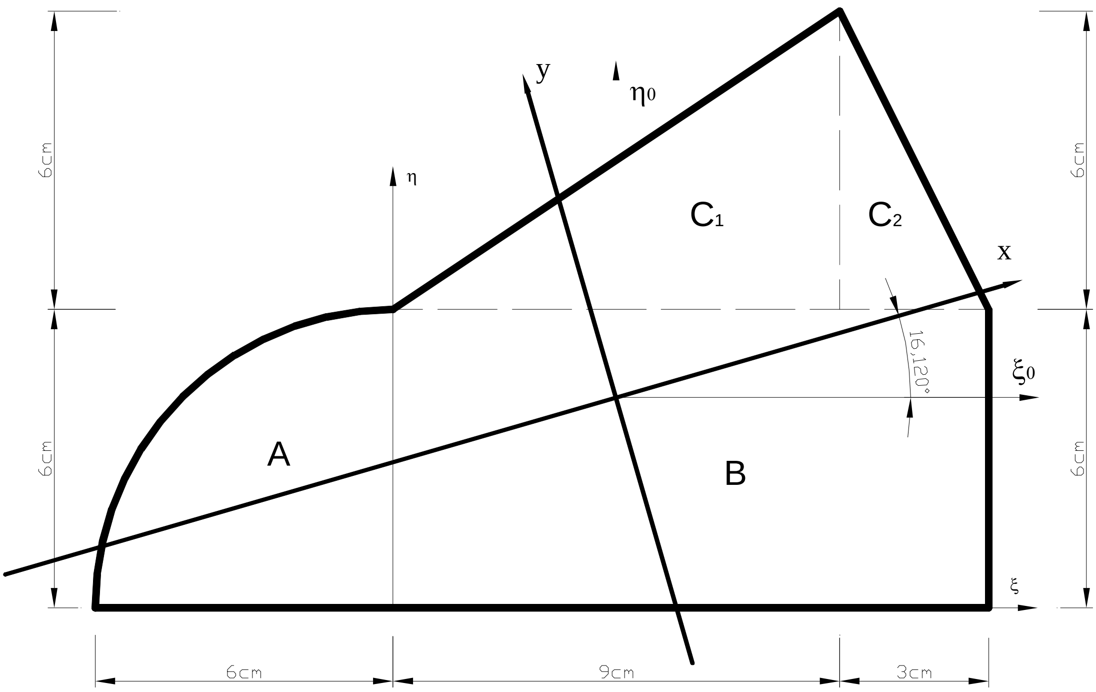
Główne centralne osie bezwładności (1)

$$\psi = 2\phi_0 \qquad \psi = \operatorname{atan}\left(\frac{2I_{\xi0\eta0}}{I_{\eta0} - I_{\xi0}}\right)$$

$$\psi = 0.563\mathrm{rad} \qquad \psi = 32.240\mathrm{deg}$$

$$\phi_0 = \frac{\psi}{2} \qquad \phi_0 = 0.281\mathrm{rad} \qquad \phi_0 = 16.120\mathrm{deg}$$

Główne centralne osie bezwładności (2)



Ekstremalne wielkości momentów bezwładności

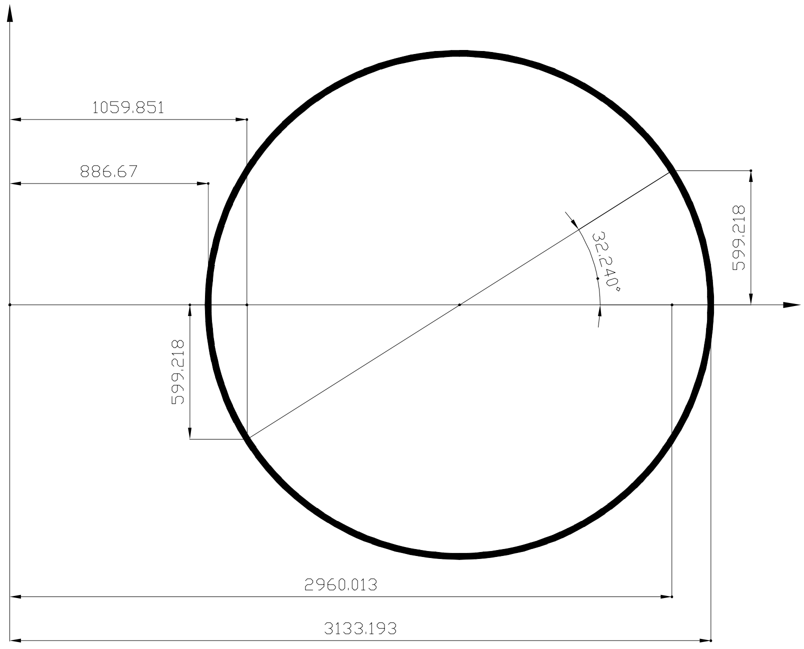
$$I_{max} = \frac{I_{\xi 0} + I_{\eta 0}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{\xi 0} - I_{\eta 0}}{2}\right)^2 + I_{\xi 0 \eta 0}{}^2}$$

$I_{max} = 3133.193 cm^4$ $\qquad$ $I_{max} = 3.133 \times 10^{-5} m^4$

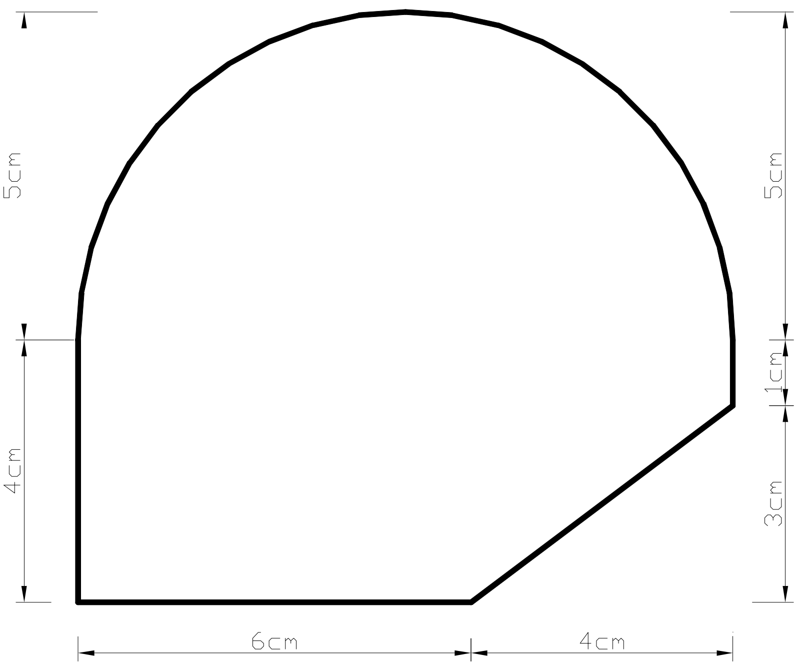
$$I_{min} = \frac{I_{\xi 0} + I_{\eta 0}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{\xi 0} - I_{\eta 0}}{2}\right)^2 + I_{\xi 0 \eta 0}{}^2}$$

$I_{min} = 886.67 cm^4$ $\qquad$ $I_{min} = 8.867 \times 10^{-6} m^4$

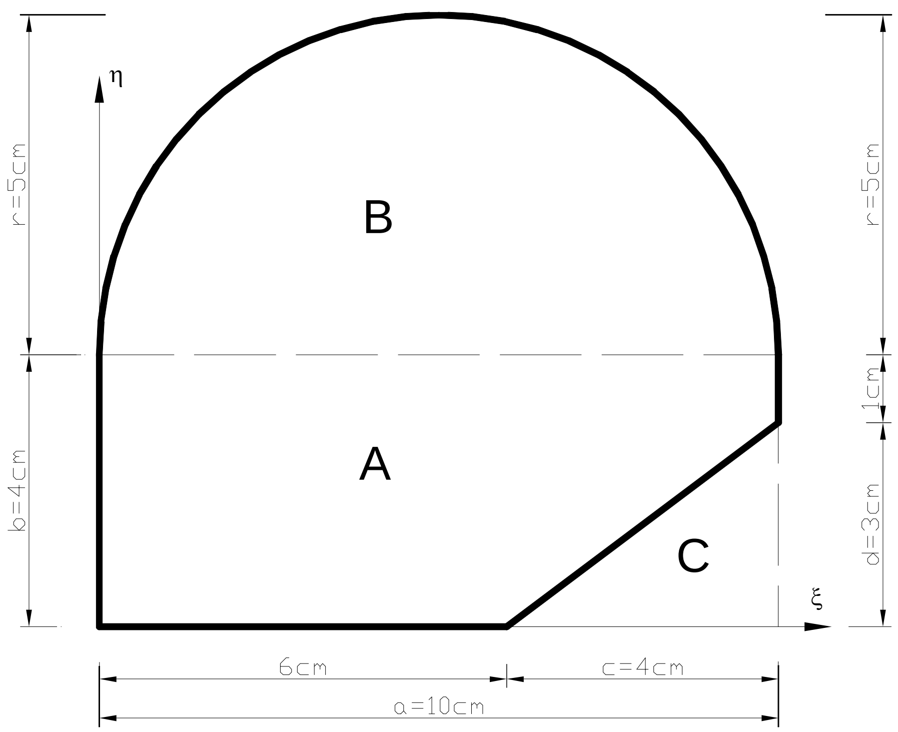
Koło Mohra



Przykład 2



Podział na figury proste



Pole powierzchni

$A_A = a \cdot b$ $\quad A_A = 4.000 \times 10^{-3} m^2$ $\quad A_A = 40 cm^2$

$A_B = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$ $\quad A_B = 3.927 \times 10^{-3} m^2$ $\quad A_B = 39.27 cm^2$

$A_C = \frac{1}{2} c \cdot d$ $\quad A_C = 6.000 \times 10^{-4} m^2$ $\quad A_C = 6 cm^2$

$A = A_A + A_B - A_C$

$A = 73.270 cm^2$ $\quad A = 7.327 \times 10^{-3} m^2$

Momenty statyczne (1)

$S_{A\xi} = A_A \cdot \frac{1}{2} \cdot b$ $\quad S_{A\xi} = 80 cm^3$ $\quad S_{A\xi} = 8.000 \times 10^{-5} m^3$

$S_{B\xi} = A_B \cdot \left(b + \frac{4}{3} \frac{r}{\pi} \right)$ $\quad S_{B\xi} = 240.413 cm^3$ $\quad S_{B\xi} = 2.404 \times 10^{-4} m^3$

$S_{C\xi} = A_C \cdot \frac{1}{3} d$ $\quad S_{C\xi} = 6 cm^3$ $\quad S_{C\xi} = 6.000 \times 10^{-6} m^3$

$S_\xi = S_{A\xi} + S_{B\xi} - S_{C\xi}$

$S_\xi = 314.413 cm^3$ $\quad S_\xi = 3.144 \times 10^{-4} m^3$

Momenty statyczne (2)

$S_{A\eta} = A_A \cdot r \qquad S_{A\eta} = 200\,cm^3 \qquad S_{A\eta} = 2.000 \times 10^{-4}\,m^3$

$S_{B\eta} = A_B \cdot \frac{1}{2} \cdot a \qquad S_{B\eta} = 196.35\,cm^3 \qquad S_{B\eta} = 1.963 \times 10^{-4}\,m^3$

$S_{C\eta} = A_C \cdot \left(a - \frac{1}{3}c\right) \qquad S_{C\eta} = 52\,cm^3 \qquad S_{C\eta} = 5.200 \times 10^{-5}\,m^3$

$S_{\eta} = S_{A\eta} + S_{B\eta} - S_{C\eta}$

$S_{\eta} = 344.35\,cm^3 \qquad S_{\eta} = 3.443 \times 10^{-4}\,m^3$

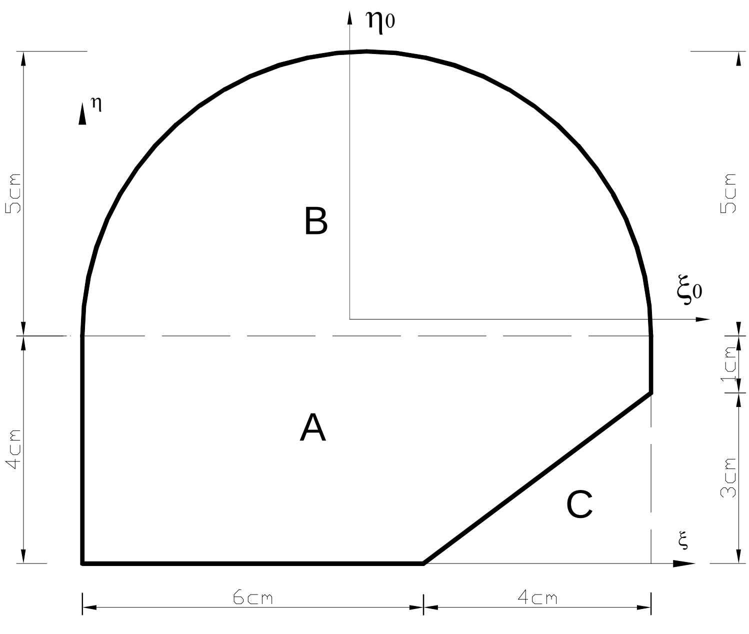
Współrzędne środka ciężkości

$\eta_0 = \frac{S_\xi}{A}$

$\eta_0 = 4.291\,cm \qquad \eta_0 = 4.291 \times 10^{-2}\,m$

$\xi_0 = \frac{S_\eta}{A}$

$\xi_0 = 4.7\,cm \qquad \xi_0 = 4.700 \times 10^{-2}\,m$



Wariant A
Momenty bezwładności (1)

$$I_{A\xi} = \frac{a \cdot b^3}{3} \qquad I_{A\xi} = 213.333\,cm^4 \qquad I_{A\xi} = 2.133 \times 10^{-6}\,m^4$$

$$I_{B\xi} = r^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) + A_B \cdot \left(b + \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)^2 \qquad I_{B\xi} = 1540.422\,cm^4 \qquad I_{B\xi} = 1.540 \times 10^{-5}\,m^4$$

$$I_{C\xi} = \frac{c \cdot d^3}{36} + A_C \cdot \left(\frac{1}{3}d\right)^2 \qquad I_{C\xi} = 9\,cm^4 \qquad I_{C\xi} = 9.000 \times 10^{-8}\,m^4$$

$$I_{\xi} = I_{A\xi} + I_{B\xi} - I_{C\xi} \qquad I_{\xi} = 1744.755\,cm^4 \qquad I_{\xi} = 1.745 \times 10^{-5}\,m^4$$

Wariant A
Momenty bezwładności (2)

$$I_{A\eta} = \frac{a^3 \cdot b}{3} \qquad I_{A\eta} = 1333.333\,cm^4 \qquad I_{A\eta} = 1.333 \times 10^{-5}\,m^4$$

$$I_{B\eta} = \frac{\pi \cdot r^4}{8} + A_B \cdot r^2 \qquad I_{B\eta} = 1227.185\,cm^4 \qquad I_{B\eta} = 1.227 \times 10^{-5}\,m^4$$

$$I_{C\eta} = \frac{c^3 \cdot d}{36} + A_C \cdot \left(a - \frac{1}{3}c\right)^2 \qquad I_{C\eta} = 456\,cm^4 \qquad I_{C\eta} = 4.560 \times 10^{-6}\,m^4$$

$$I_{\eta} = I_{A\eta} + I_{B\eta} - I_{C\eta} \qquad I_{\eta} = 2104.518\,cm^4 \qquad I_{\eta} = 2.105 \times 10^{-5}\,m^4$$

Wariant A
Momenty odśrodkowe (2)

$$I_{A\xi\eta} = \frac{a^2 \cdot b^2}{4} \qquad I_{A\xi\eta} = 400\,cm^4 \qquad I_{A\xi\eta} = 4.000 \times 10^{-6}\,m^4$$

$$I_{B\xi\eta} = 0 + A_B \cdot r \cdot \left(b + \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right) \qquad I_{B\xi\eta} = 1202.065\,cm^4 \qquad I_{B\xi\eta} = 1.202 \times 10^{-5}\,m^4$$

$$I_{C\xi\eta} = \frac{c^2 \cdot d^2}{72} + A_C \cdot \frac{1}{3} d \cdot \left(a - \frac{1}{3} c\right) \qquad I_{C\xi\eta} = 54\,cm^4 \qquad I_{C\xi\eta} = 5.400 \times 10^{-7}\,m^4$$

$$I_{\xi\eta} = I_{A\xi\eta} + I_{B\xi\eta} - I_{C\xi\eta} \qquad I_{\xi\eta} = 1548.065\,cm^4 \qquad I_{\xi\eta} = 1.548 \times 10^{-5}\,m^4$$

Momenty bezwładności względem osi własnych

$$I_{\xi 0} = I_{\xi} - A \cdot \eta_0^{\,2} \qquad I_{\xi 0} = 395.559\,cm^4 \qquad I_{\xi 0} = 3.956 \times 10^{-6}\,m^4$$

$$I_{\eta 0} = I_{\eta} - A \cdot \xi_0^{\,2} \qquad I_{\eta 0} = 486.165\,cm^4 \qquad I_{\eta 0} = 4.862 \times 10^{-6}\,m^4$$

$$I_{\xi 0 \eta 0} = I_{\xi\eta} - A \cdot \xi_0 \cdot \eta_0 \qquad I_{\xi 0 \eta 0} = 70.406\,cm^4 \qquad I_{\xi 0 \eta 0} = 7.041 \times 10^{-7}\,m^4$$

Wariant B Momenty bezwładności (1)

$$I_{A\xi0} = \frac{a \cdot b^3}{12} + A_A \cdot \left(\eta_0 - \frac{b}{2}\right)^2 \qquad I_{A\xi0} = 263.31\,cm^4 \qquad I_{A\xi0} = 2.633\times 10^{-6}\,m^4$$

$$I_{B\xi0} = r^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) + A_B \cdot \left[\eta_0 - \left(b + \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)\right]^2$$

$$I_{B\xi0} = 200.239\,cm^4 \qquad I_{B\xi0} = 2.002\times 10^{-6}\,m^4$$

$$I_{C\xi0} = \frac{c \cdot d^3}{36} + A_C \cdot \left(\eta_0 - \frac{1}{3}d\right)^2 \qquad I_{C\xi0} = 67.99\,cm^4 \qquad I_{C\xi0} = 6.799\times 10^{-7}\,m^4$$

$$I_{\xi0} = I_{A\xi0} + I_{B\xi0} - I_{C\xi0} \qquad I_{\xi0} = 395.559\,cm^4 \qquad I_{\xi0} = 3.956\times 10^{-6}\,m^4$$

Wariant B Momenty bezwładności (2)

$$I_{A\eta0} = \frac{a^3 b}{12} + A_A \cdot \left(\xi_0 - \frac{a}{2}\right)^2 \qquad I_{A\eta0} = 336.94\,cm^4 \qquad I_{A\eta0} = 3.369\times 10^{-6}\,m^4$$

$$I_{B\eta0} = \pi\frac{r^4}{8} + A_B \cdot \left(\xi_0 - r\right)^2 \qquad I_{B\eta0} = 248.977\,cm^4 \qquad I_{B\eta0} = 2.490\times 10^{-6}\,m^4$$

$$I_{C\eta0} = \frac{c^3 \cdot d}{36} + A_C \cdot \left[\xi_0 - \left(a - \frac{1}{3}c\right)\right]^2$$

$$I_{C\eta0} = 99.752\,cm^4 \qquad I_{C\eta0} = 9.975\times 10^{-7}\,m^4$$

$$I_{\eta0} = I_{A\eta0} + I_{B\eta0} - I_{C\eta0} \qquad I_{\eta0} = 486.165\,cm^4 \qquad I_{\eta0} = 4.862\times 10^{-6}\,m^4$$

Wariant B
Momenty odśrodkowe

$$I_{A\xi0\eta0} = 0 + A_A \cdot \left(\eta_0 - \frac{b}{2}\right) \cdot \left(\xi_0 - \frac{a}{2}\right) \qquad I_{A\xi0\eta0} = -27.518\,cm^4 \qquad I_{A\xi0\eta0} = -2.752 \times 10^{-7}\,m^4$$

$$I_{B\xi0\eta0} = 0 + A_B \cdot \left[\eta_0 - \left(b + \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)\right] \cdot \left(\xi_0 - r\right) \qquad I_{B\xi0\eta0} = 21.589\,cm^4 \qquad I_{B\xi0\eta0} = 2.159 \times 10^{-7}\,m^4$$

$$I_{C\xi0\eta0} = \frac{c^2 \cdot d^2}{72} + A_C \cdot \left(\eta_0 - \frac{1}{3}d\right) \cdot \left[\xi_0 - \left(a - \frac{1}{3}c\right)\right]$$

$$I_{C\xi0\eta0} = -76.335\,cm^4 \qquad I_{C\xi0\eta0} = -7.633 \times 10^{-7}\,m^4$$

$$I_{\xi0\eta0} = I_{A\xi0\eta0} + I_{B\xi0\eta0} - I_{C\xi0\eta0} \qquad I_{\xi0\eta0} = 70.406\,cm^4 \qquad I_{\xi0\eta0} = 7.041 \times 10^{-7}\,m^4$$

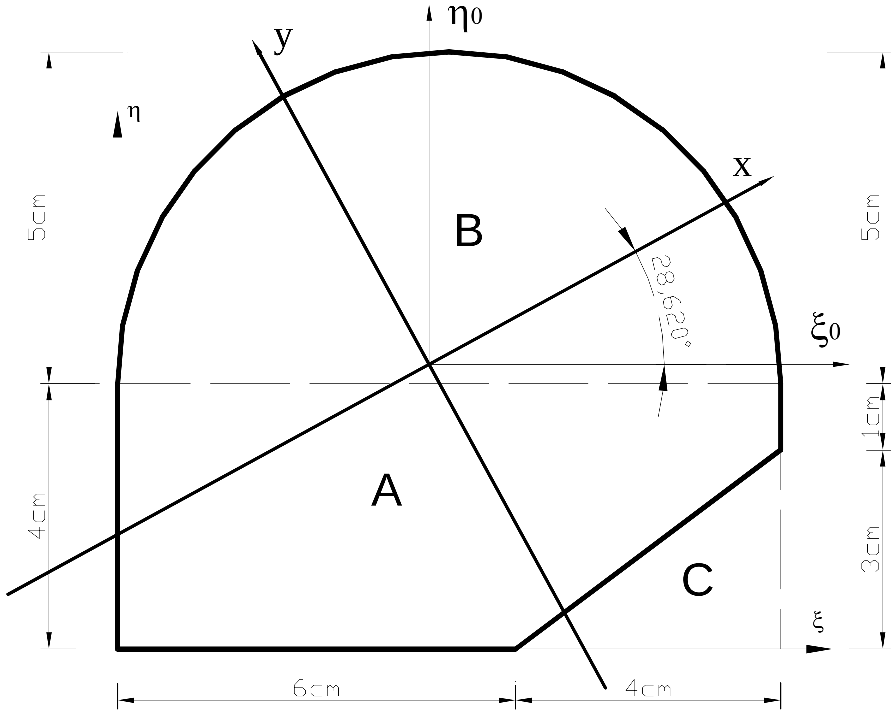
Główne centralne osie bezwładności (1)

$$\psi = 2\phi_0 \qquad \psi = \operatorname{atan}\left(\frac{2I_{\xi0\eta0}}{I_{\eta0} - I_{\xi0}}\right)$$

$$\psi = 0.999\,rad \qquad \psi = 57.241\,deg$$

$$\phi_0 = \frac{\psi}{2} \qquad \phi_0 = 0.500\,rad \qquad \phi_0 = 28.620\,deg$$

Główne centralne osie bezwładności (2)



Ekstremalne wielkości momentów bezwładności

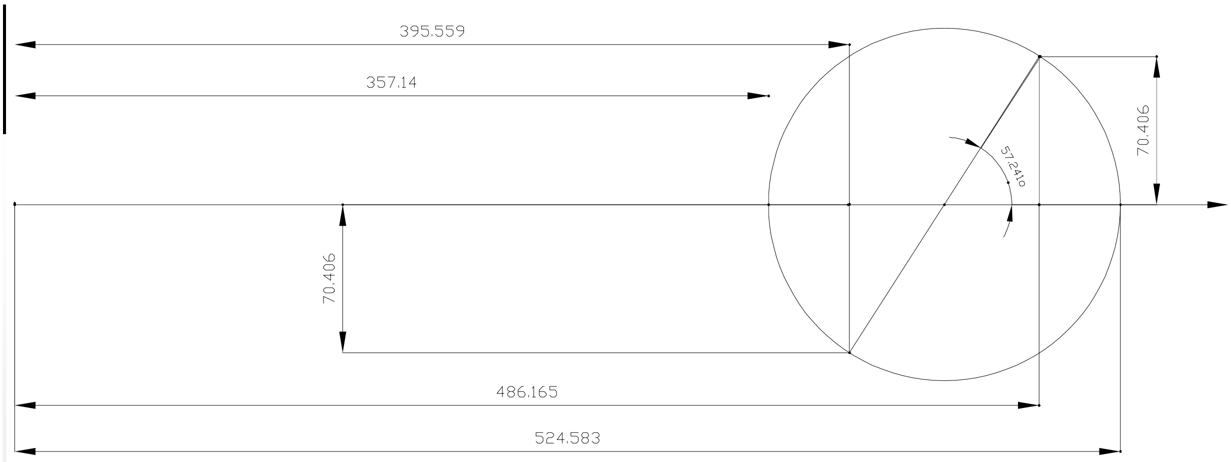
$$I_{max} = \frac{I_{\xi 0} + I_{\eta 0}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{\xi 0} - I_{\eta 0}}{2}\right)^2 + I_{\xi 0 \eta 0}{}^2}$$

$I_{max} = 524.583\,cm^4$ $\qquad$ $I_{max} = 5.246 \times 10^{-6}\,m^4$

$$I_{min} = \frac{I_{\xi 0} + I_{\eta 0}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{\xi 0} - I_{\eta 0}}{2}\right)^2 + I_{\xi 0 \eta 0}{}^2}$$

$I_{min} = 357.14\,cm^4$ $\qquad$ $I_{min} = 3.571 \times 10^{-6}\,m^4$

Koło Mohra

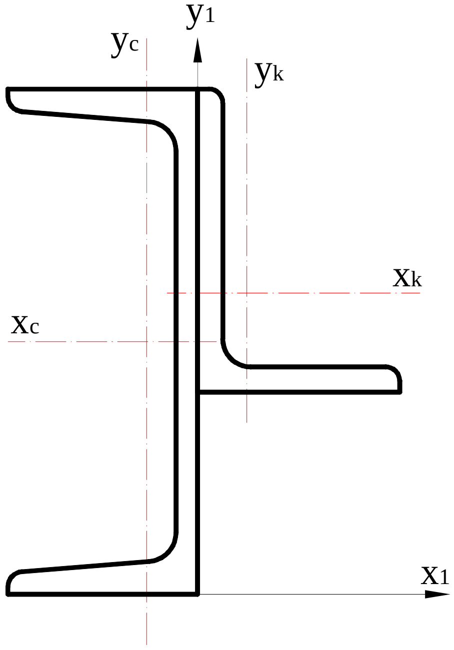


Przykład 3

- Wyznaczyć położenie głównych centralnych osi bezwładności i główne momenty bezwładności przekroju złożonego z kształtowników walcowanych:

  ceownik 200

  kątownik 120x80x10



Charakterystyki geometryczne

ceownik 200

$A_c = 32.2cm^2$

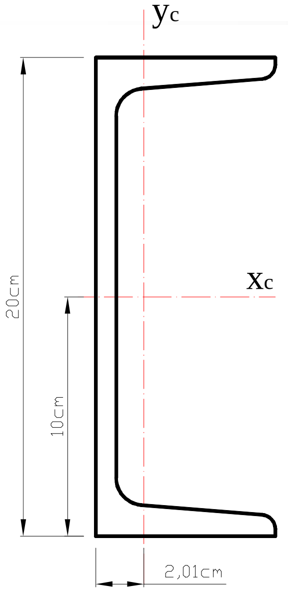
$I_{xc} = 1910cm^4$

$I_{yc} = 148cm^4$

$e_{yc} = 2.01cm$

$h_c = 200mm$

$I_{xyc} = 0m^4$



kątownik 120x80x10

$A_k = 19.1cm^2$

$I_{xk} = 276cm^4$

$I_{yk} = 98.1cm^4$

$I_{\eta k} = 56.8cm^4$

$I_{\xi k} = 317.3cm^4$

$e_{xk} = 3.92cm$

$e_{yk} = 1.95cm$

$h_k = 120mm$

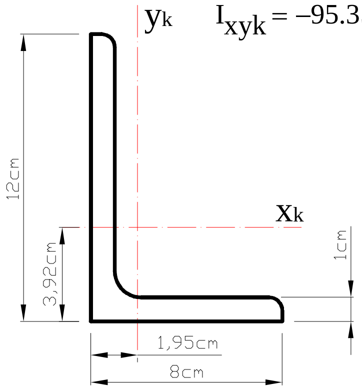
$tg\alpha = 0.435$

$I_{maxk} = I_{\xi k}$

$I_{xyk} = tg\alpha \cdot \left(I_{yk} - I_{maxk}\right)$

$I_{xyk} = -9.535\times 10^{-7}m^4$

$I_{xyk} = -95.352cm^4$



Momenty statyczne (1)

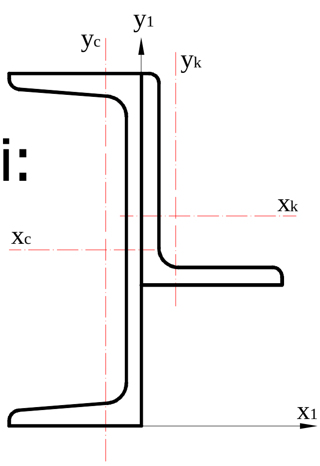
- Pola powierzchni:

$A_f = A_k + A_c \qquad A_f = 51.3cm^2 \qquad A_f = 5.13\times 10^{-3}m^2$

- Współrzędne środków ciężkości:

$y_{1k} = h_c - h_k + e_{xk} \qquad y_{1k} = 0.119m \qquad y_{1k} = 11.92cm$

$y_{1c} = \frac{h_c}{2} \qquad y_{1c} = 10cm \qquad y_{1c} = 0.1m$



- Momenty statyczne:

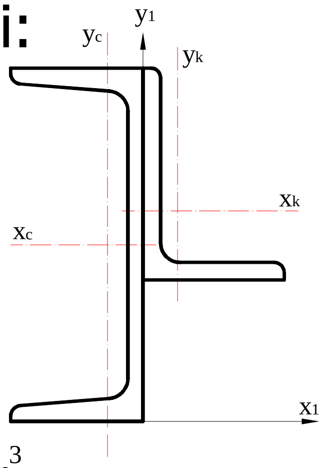
$S_{x1c} = A_c \cdot y_{1c} \qquad S_{x1c} = 322cm^3 \qquad S_{x1c} = 3.22\times 10^{-4}m^3$

$S_{x1k} = A_k \cdot y_{1k} \qquad S_{x1k} = 227.672cm^3 \qquad S_{x1k} = 2.277\times 10^{-4}m^3$

$S_{x1f} = S_{x1c} + S_{x1k} \qquad S_{x1f} = 549.672cm^3 \qquad S_{x1f} = 5.497\times 10^{-4}m^3$

Momenty statyczne (2)

- Współrzędne środków ciężkości:



$x_{1k} = e_{yk}$ $\quad x_{1k} = 1.95\text{cm}$ $\quad x_{1k} = 0.02\text{m}$

$x_{1c} = -e_{yc}$ $\quad x_{1c} = -0.02\text{m}$ $\quad x_{1c} = -2.01\text{cm}$

- Momenty statyczne:

$S_{y1c} = A_c \cdot x_{1c}$ $\quad S_{y1c} = -64.722\text{cm}^3$ $\quad S_{y1c} = -6.472 \times 10^{-5}\,\text{m}^3$

$S_{y1k} = A_k \cdot x_{1k}$ $\quad S_{y1k} = 37.245\text{cm}^3$ $\quad S_{y1k} = 3.725 \times 10^{-5}\,\text{m}^3$

$S_{y1f} = S_{y1c} + S_{y1k}$ $\quad S_{y1f} = -27.477\text{cm}^3$ $\quad S_{y1f} = -2.748 \times 10^{-5}\,\text{m}^3$

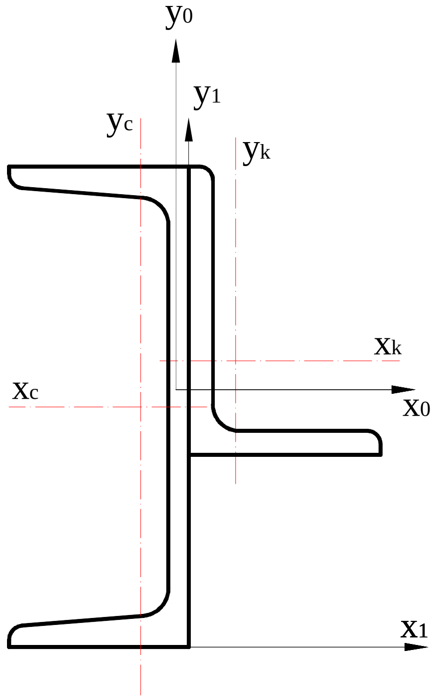
Współrzędne środka ciężkości przekroju

$$x_0 = \frac{S_{y1f}}{A_f}$$

$x_0 = -0.536\text{cm}$ $\quad x_0 = -5.356 \times 10^{-3}\,\text{m}$

$$y_0 = \frac{S_{x1f}}{A_f}$$

$y_0 = 10.715\text{cm}$ $\quad y_0 = 0.107\text{m}$



Momenty bezwładności i moment odśrodkowy

$$I_{x0} = I_{xk} + A_k \cdot (y_{1k} - y_0)^2 + I_{xc} + A_c \cdot (y_{1c} - y_0)^2$$

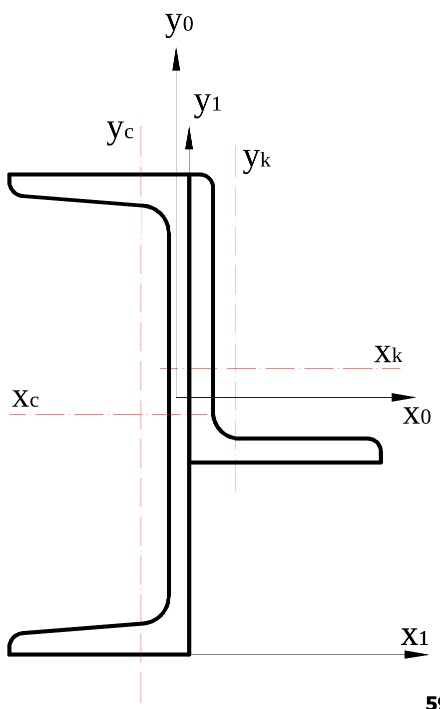
$$I_{x0} = 2230.195\,cm^4 \qquad I_{x0} = 2.23 \times 10^{-5}\,m^4$$

$$I_{y0} = I_{yk} + A_k \cdot (x_{1k} - x_0)^2 + I_{yc} + A_c \cdot (x_{1c} - x_0)^2$$

$$I_{y0} = 434.102\,cm^4 \qquad I_{y0} = 4.341 \times 10^{-6}\,m^4$$

$$I_{x0y0} = I_{xyk} + A_k \cdot (x_{1k} - x_0) \cdot (y_{1k} - y_0) \ldots$$
$$+ I_{xyc} + A_c \cdot (x_{1c} - x_0) \cdot (y_{1c} - y_0)$$

$$I_{x0y0} = -4.2\,cm^4 \qquad I_{x0y0} = -4.2 \times 10^{-8}\,m^4$$

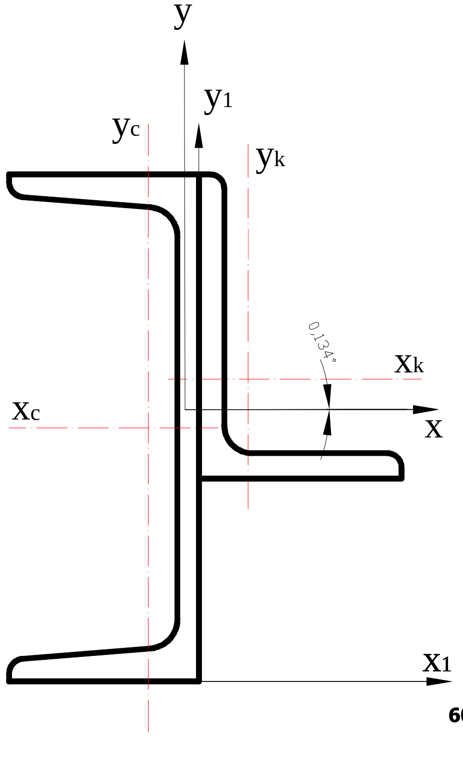


Główne centralne osie bezwładności (1)

$$\psi = 2\phi_0 \qquad \psi = \operatorname{atan}\left(\frac{2I_{x0y0}}{I_{y0} - I_{x0}}\right)$$

$$\psi = 0.005\,rad \qquad \psi = 0.268\,deg$$

$$\phi_0 = \frac{\psi}{2} \qquad \phi_0 = 0.002\,rad \qquad \phi_0 = 0.134\,deg$$



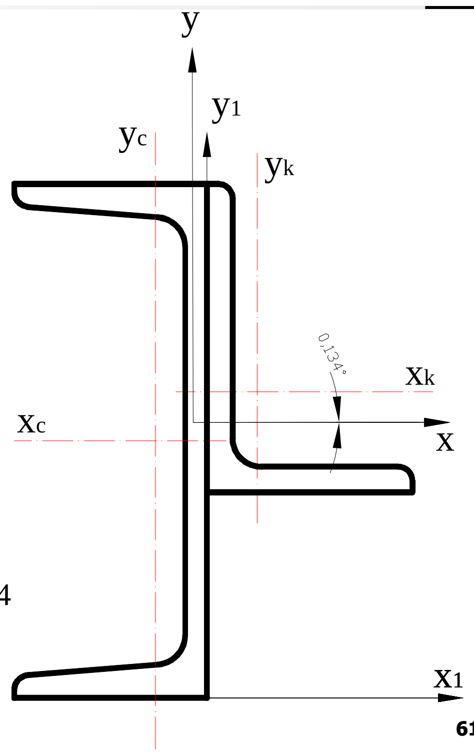
Ekstremalne wielkości momentów bezwładności

$$I_{max} = \frac{I_{x0} + I_{y0}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{x0} - I_{y0}}{2}\right)^2 + I_{x0y0}^{\;2}}$$

$I_{max} = 2230.205 cm^4$ $\qquad I_{max} = 2.23 \times 10^{-5} m^4$

$$I_{min} = \frac{I_{x0} + I_{y0}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{x0} - I_{y0}}{2}\right)^2 + I_{x0y0}^{\;2}}$$

$I_{min} = 434.092 cm^4$ $\qquad I_{min} = 4.341 \times 10^{-6} m^4$



Koło Mohra