

Mechanika ogólna

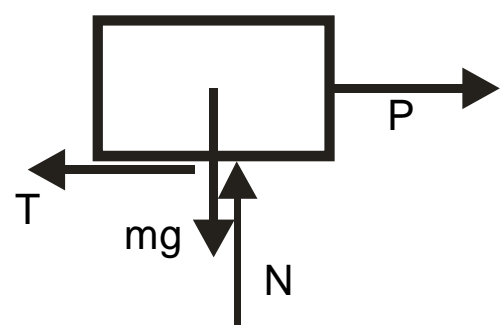
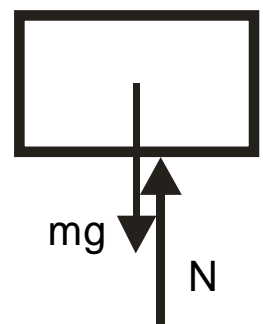
Wykład nr 13

Zjawisko tarcia. Prawa tarcia.

1

Więzy z tarciem

- W więzach, w których nie występuje tarcie, reakcja jest prostopadła do płaszczyzny styku ciał (nacisk).
- W więzach z tarciem dochodzi jeszcze jedna reakcja, równoległa do płaszczyzny styku.



2

Prawa tarcia statycznego Coulomba i Morena

- Siła tarcia jest zawsze **przeciwna do** występującego lub ewentualnego **ruchu**.
- Wielkość siły tarcia jest **niezależna od** pola **powierzchni** stykających się ciał, **zależy** jedynie **od rodzaju powierzchni**.
- Zależność między naciskiem i siłą tarcia:
$$T = \mu \cdot N$$

3

Współczynnik tarcia

Rodzaj powierzchni	μ
Stal-stal	0,15
Stal-żeliwo	0,18
Żeliwo-żeliwo	0,45
Metal-drewno	0,5-0,6
Drewno-drewno	0,65
Skóra-metal	0,6

4

Tarcie statyczne i kinetyczne

- Tarcie występuje w przypadku układów poruszających (**kinetyczne**) lub w układach, w których ruch jest potencjalnie możliwy, ale jeszcze do niego nie dochodzi (**statyczne**).

5

Tarcie statyczne

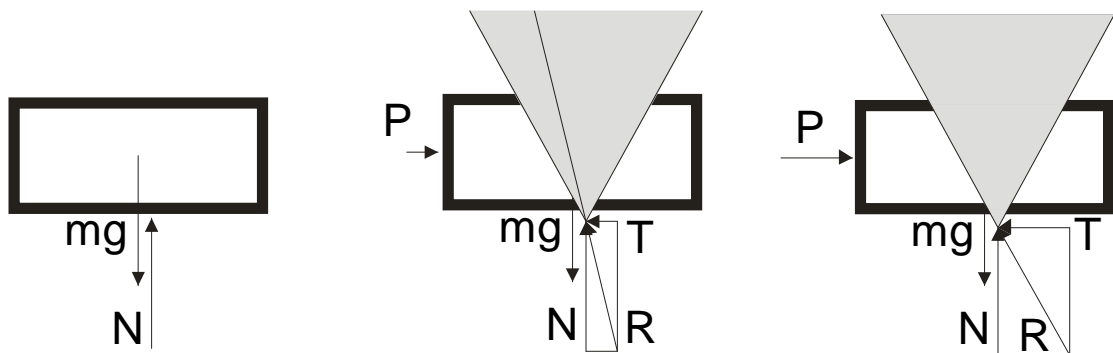
- Tarcie **statyczne** przeciwdziałające wystąpieniu ruchu zwiększa się w wyniku przyłożenia siły od 0 do wartości maksymalnej (tarcie całkowicie rozwinięte).

6

Kąt tarcia

- Kąt między reakcją pionową a siłą tarcia nazywany jest kątem tarcia:

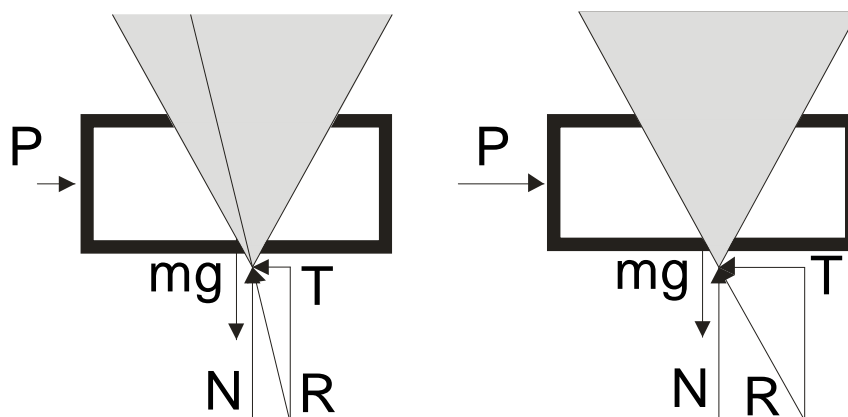
$$\mu = \frac{T}{N} = \operatorname{tg} \phi$$



7

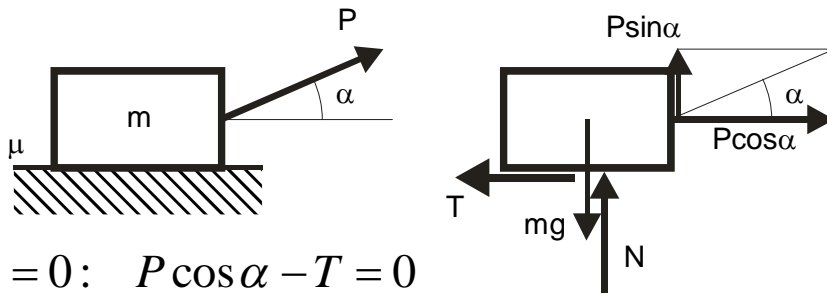
Stożek tarcia

- Linia działania wypadkowej reakcji zawarta jest wewnątrz, lub w przypadku tarcia całkowicie rozwiniętego, na powierzchni stożka nazywanego stożkiem tarcia.



8

Tarcie ślizgowe - przykład



$$\sum X = 0: P \cos \alpha - T = 0$$

$$\sum Y = 0: P \sin \alpha + N - m \cdot g = 0$$

■ Prawo tarcia: $T = \mu \cdot N$

$$N = m \cdot g - P \sin \alpha$$

$$\mu (m \cdot g - P \sin \alpha) = P \cos \alpha$$

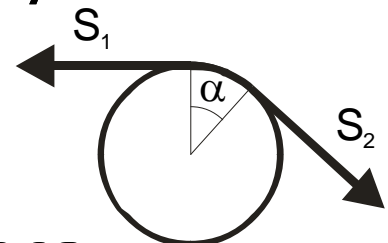
$$P = \frac{\mu \cdot m \cdot g}{\mu \sin \alpha + \cos \alpha}$$

9

Tarcie cięgien o bloczek nieruchomy (1)

- Zależność między siłami w cięgnie przy całkowicie rozwiniętym tarcu:

$$S_1 = S_2 \cdot e^{\mu \alpha}$$



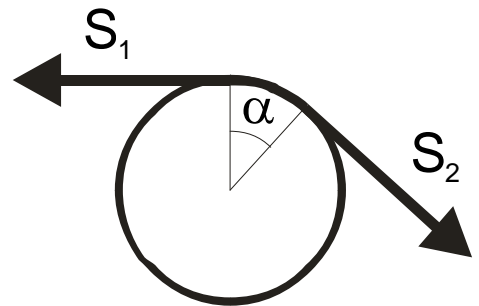
gdzie S_1 jest siłą działającą w cięgnie w kierunku ewentualnego ruchu.

10

Tarcie ciągien o bloczek nieruchomy (2)

- Zależność odwrotna:

$$S_2 = S_1 \cdot e^{-\mu\alpha}$$

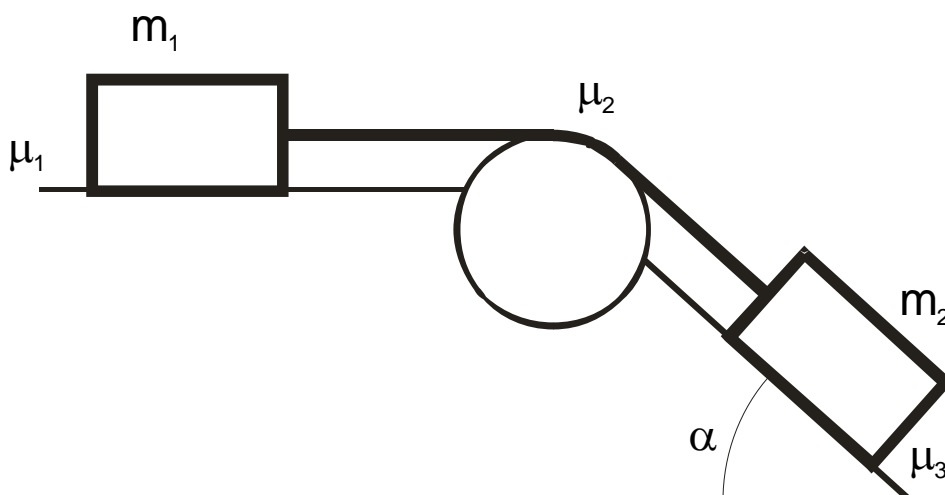


- Kąt α nazywany jest kątem opasania i musi być wyrażany w radianach.

11

Tarcie ciągien – przykład (1)

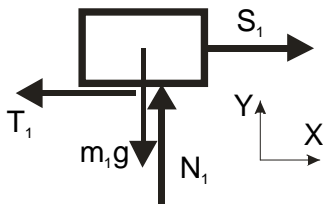
- Obliczyć masę graniczną m_2 , po przekroczeniu której rozpocznie się ruch. Miara kąta $\alpha=30^\circ$.



12

Tarcie ciągłych – przykład ⁽²⁾

I

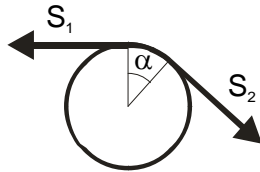


$$\sum X = 0: S_1 - T_1 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_1 - m_1 \cdot g = 0$$

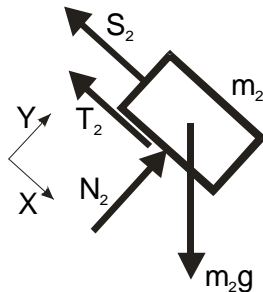
$$T_1 = \mu_1 \cdot N_1$$

II



$$S_2 = S_1 \cdot e^{\mu_2 \alpha}$$

III



$$\sum X = 0: m_2 g \sin \alpha - S_2 - T_2 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_2 - m_2 g \cos \alpha = 0$$

$$T_2 = \mu_3 \cdot N_2$$

13

Przykład – rozwiązanie

I $S_1 = T_1$

$$N_1 = m_1 \cdot g$$

$$T_1 = \mu_1 \cdot N_1$$

$$S_1 = \mu_1 \cdot N_1 = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g$$

II

$$S_2 = S_1 \cdot e^{\mu_2 \alpha}$$

$$S_2 = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot e^{\mu_2 \frac{\pi}{6}}$$

III

$$m_2 g \sin \alpha - S_2 - T_2 = 0$$

$$m_2 g \sin \alpha - \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot e^{\mu_2 \frac{\pi}{6}} - \mu_3 \cdot m_2 g \cos \alpha = 0$$

$$N_2 = m_2 g \cos \alpha$$

$$m_2 = \frac{\mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot e^{\mu_2 \frac{\pi}{6}}}{g \sin \alpha - \mu_3 \cdot g \cos \alpha}$$

$$T_2 = \mu_3 \cdot N_2$$

14

Opór przy toczeniu

- W rzeczywistych układach, w przypadku ciał o przekrojach okrągłych, reakcja pionowa przesunięta jest w kierunku ewentualnego ruchu.
- Wynika to z nierównomiernego rozkładu sił pod ciałem. Mimo założenia kołowości przekroju, w rzeczywistości styk nie jest punktowy.

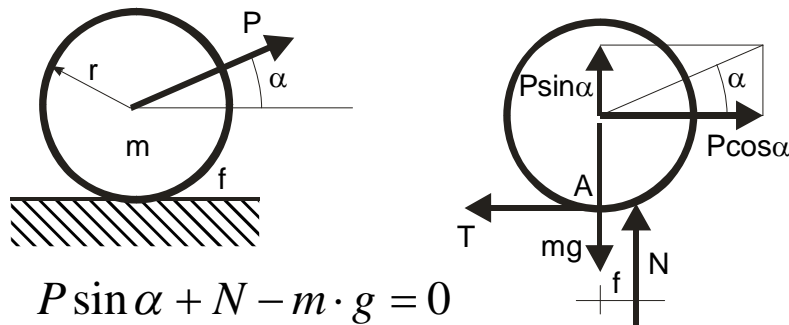
15

Wartości współczynnika oporu toczenia

Koło	Rodzaj podłoża	f [cm]
Drewno	Drewno	0,05-0,8
Drewno	Stal	0,03-0,04
Stal	Stal	0,001-0,005
Żeliwo	Żeliwo	0,005

16

Opór toczenia - przykład



$$\sum Y = 0: P \sin \alpha + N - m \cdot g = 0$$

$$\sum M_A = 0: P \cos \alpha \cdot r - N \cdot f = 0$$

$$N = m \cdot g - P \sin \alpha$$

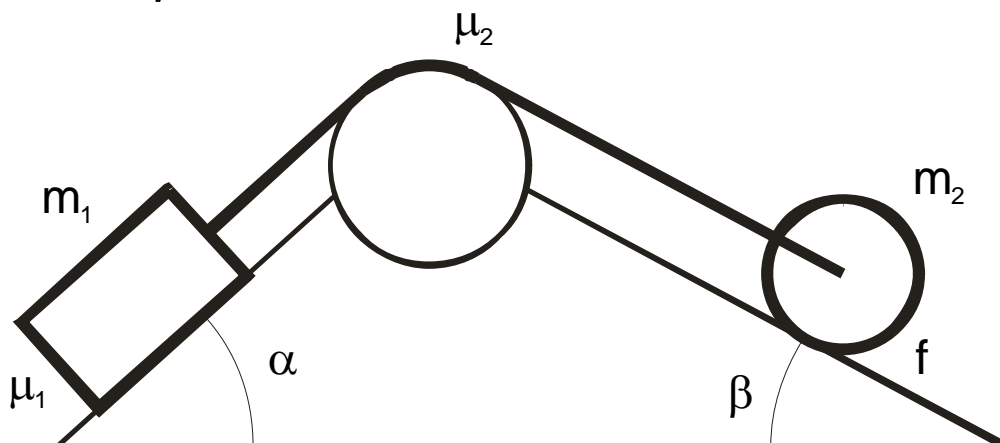
$$P \cos \alpha \cdot r - (m \cdot g - P \sin \alpha) \cdot f = 0$$

$$P = \frac{m \cdot g \cdot f}{r \cdot \cos \alpha + f \sin \alpha}$$

17

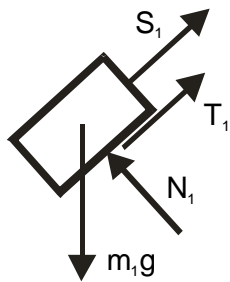
Przykład A

- Określić zakres, w jakim ma mieścić się wielkość masy m_2 , aby nie wystąpił ruch.
 $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$



18

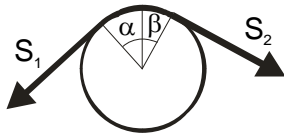
Przykład A – wariant I (ruch w lewo)



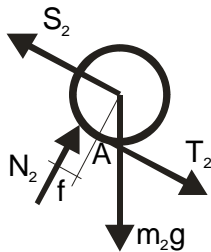
$$\sum X = 0: m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha - S_1 - T_1 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_1 - m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha = 0$$

$$T_1 = \mu_1 \cdot N_1$$



$$S_2 = S_1 \cdot e^{-\mu_2(\alpha + \beta)}$$



$$\sum Y = 0: N_2 - m_2 g \cos \beta = 0$$

$$\sum M_A = 0: N_2 \cdot f - S_2 \cdot r + m_2 g \sin \alpha \cdot r = 0$$

19

Wariant I - rozwiązanie

$$N_1 = m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$T_1 = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$S_1 = m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha - \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha$$

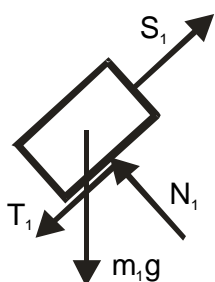
$$S_2 = (m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha - \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha) \cdot e^{-\mu_2(\alpha + \beta)}$$

$$N_2 = m_2 g \cos \beta$$

$$m_{2\min} = \frac{(m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha - \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha) \cdot e^{-\mu_2(\alpha + \beta)} \cdot r}{g \cos \beta \cdot f + g \sin \alpha \cdot r}$$

20

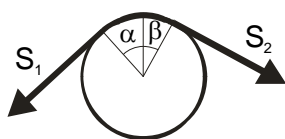
Przykład A – wariant II (ruch w prawo)



$$\sum X = 0: m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha - S_1 + T_1 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_1 - m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha = 0$$

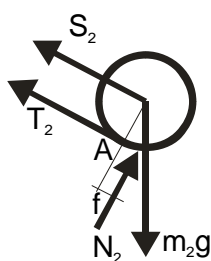
$$T_1 = \mu_1 \cdot N_1$$



$$S_2 = S_1 \cdot e^{\mu_2(\alpha + \beta)}$$

$$\sum Y = 0: N_2 - m_2 g \cos \beta = 0$$

$$\sum M_A = 0: N_2 \cdot f + S_2 \cdot r - m_2 g \sin \alpha \cdot r = 0$$



21

Wariant II - rozwiązanie

$$N_1 = m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$T_1 = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$S_1 = m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha + \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$S_2 = (m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha + \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha) \cdot e^{\mu_2(\alpha + \beta)}$$

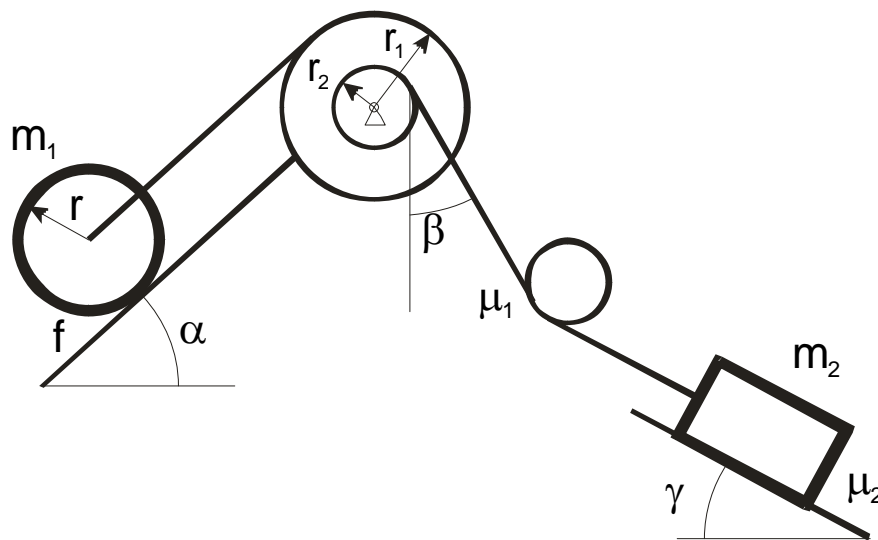
$$N_2 = m_2 g \cos \beta$$

$$m_{2\max} = \frac{(m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha + \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha) \cdot e^{\mu_2(\alpha + \beta)} \cdot r}{g \sin \alpha \cdot r - g \cos \beta \cdot f}$$

22

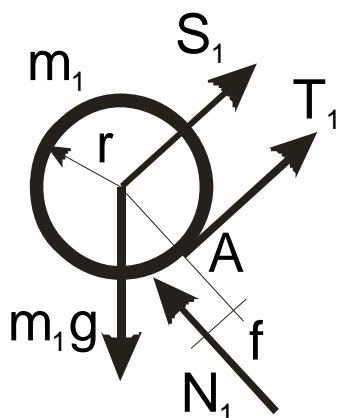
Przykład B-I (1)

- Określić maksimum masy m_1 , przy którym nie wystąpi jeszcze ruch.



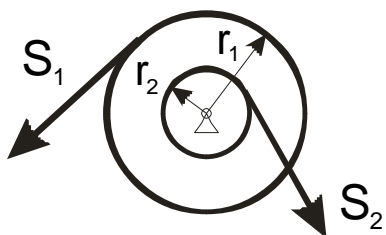
23

Przykład B-I (2)



$$\sum Y = 0: N_1 - m_1 g \cos \alpha = 0$$

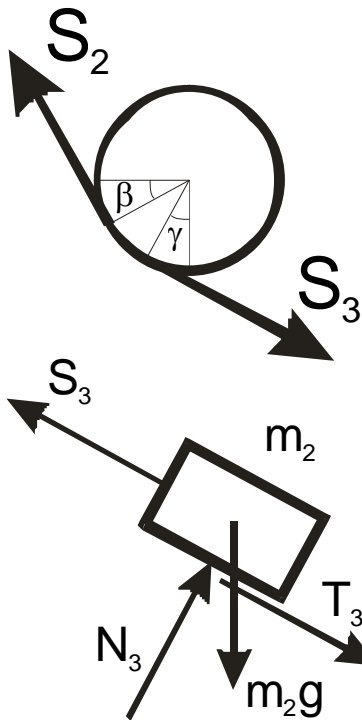
$$\sum M_A = 0: N_1 \cdot f + S_1 \cdot r - m_1 g \sin \alpha \cdot r = 0$$



$$\sum M_O = 0: S_1 \cdot r_1 - S_2 \cdot r_2 = 0$$

24

Przykład B-I (3)



$$S_3 = S_2 \cdot e^{-\mu_1 \left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right)}$$

$$\sum X = 0: m_2 \cdot g \cdot \sin \gamma - S_3 + T_3 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_3 - m_2 \cdot g \cdot \cos \gamma = 0$$

$$T_3 = \mu_2 \cdot N_3$$

25

Przykład B-I - rozwiązanie

$$N_1 = m_1 g \cos \alpha \quad S_1 = \frac{m_1 g \sin \alpha \cdot r - m_1 g \cos \alpha \cdot f}{r}$$

$$S_2 = \frac{S_1 \cdot r_1}{r_2} = \frac{m_1 g \sin \alpha \cdot r - m_1 g \cos \alpha \cdot f}{r} \cdot \frac{r_1}{r_2}$$

$$S_3 = S_2 \cdot e^{-\mu_1 \left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right)} = \frac{m_1 g \sin \alpha \cdot r - m_1 g \cos \alpha \cdot f}{r} \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{-\mu_1 \left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right)}$$

$$N_3 = m_2 \cdot g \cdot \cos \gamma$$

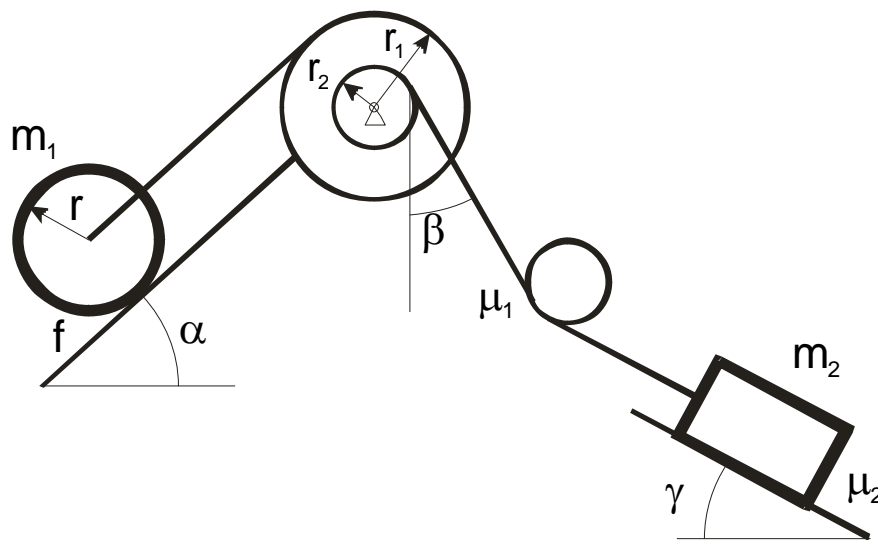
$$T_3 = \mu_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos \gamma$$

$$m_1 = \frac{(m_2 \cdot g \cdot \sin \gamma + \mu_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos \gamma) \cdot r \cdot r_2}{(g \sin \alpha \cdot r - g \cos \alpha \cdot f) \cdot r_1} \cdot e^{\mu_1 \left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right)}$$

26

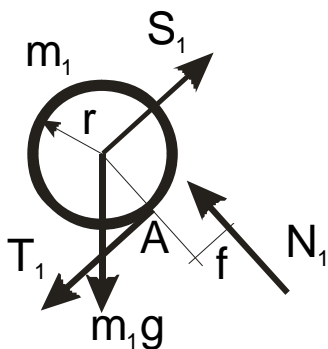
Przykład B-II (1)

- Określić minimum masy m_1 , przy którym nie wystąpi jeszcze ruch.



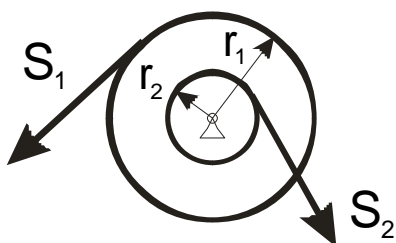
27

Przykład B-II (2)



$$\sum Y = 0: N_1 - m_1 g \cos \alpha = 0$$

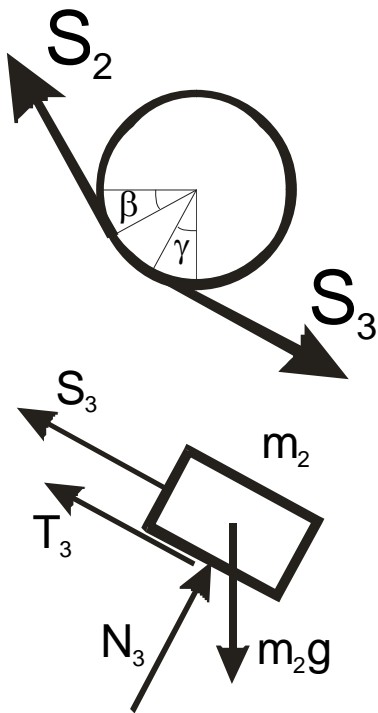
$$\sum M_A = 0: N_1 \cdot f - S_1 \cdot r + m_1 g \sin \alpha \cdot r = 0$$



$$\sum M_O = 0: S_1 \cdot r_1 - S_2 \cdot r_2 = 0$$

28

Przykład B-II (3)



$$S_3 = S_2 \cdot e^{\mu_1 \left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right)}$$

$$\sum X = 0: m_2 \cdot g \cdot \sin \gamma - S_3 - T_3 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_3 - m_2 \cdot g \cdot \cos \gamma = 0$$

$$T_3 = \mu_2 \cdot N_3$$

29

Przykład B-II - rozwiązanie

$$N_1 = m_1 g \cos \alpha \quad S_1 = \frac{m_1 g \cos \alpha \cdot f + m_1 g \sin \alpha \cdot r}{r}$$

$$S_2 = \frac{S_1 \cdot r_1}{r_2} = \frac{m_1 g \cos \alpha \cdot f + m_1 g \sin \alpha \cdot r}{r} \cdot \frac{r_1}{r_2}$$

$$S_3 = S_2 \cdot e^{\mu_1 \left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right)} = \frac{m_1 g \cos \alpha \cdot f + m_1 g \sin \alpha \cdot r}{r} \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{\mu_1 \left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right)}$$

$$N_3 = m_2 \cdot g \cdot \cos \gamma$$

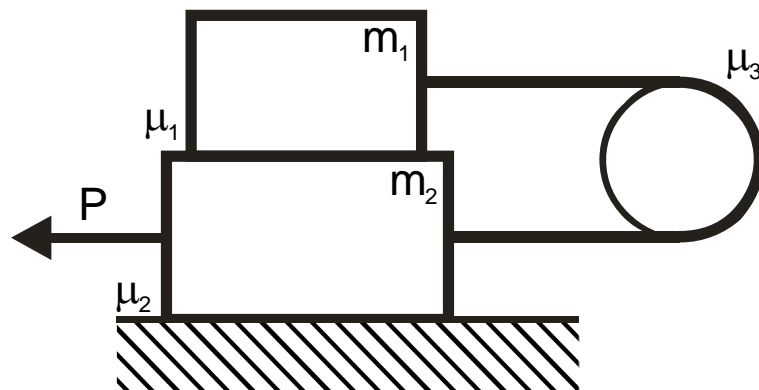
$$T_3 = \mu_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos \gamma$$

$$m_1 = \frac{(m_2 \cdot g \cdot \sin \gamma - \mu_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos \gamma) \cdot r \cdot r_2}{(g \cos \alpha \cdot f + g \sin \alpha \cdot r) \cdot r_1} \cdot e^{-\mu_1 \left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right)}$$

30

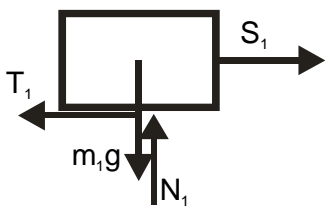
Przykład C-I (1)

- Określić graniczną wartość siły, przy przekroczeniu której może wystąpić ruch.



31

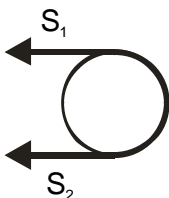
Przykład C-I (2)



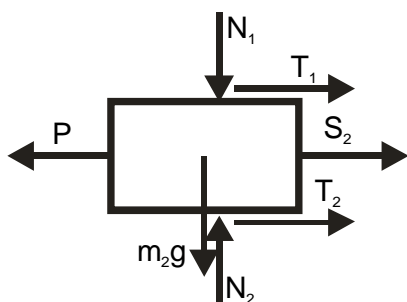
$$\sum X = 0: S_1 - T_1 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_1 - m_1 \cdot g = 0$$

$$T_1 = \mu_1 \cdot N_1$$



$$S_2 = S_1 \cdot e^{\mu_3 \pi}$$



$$\sum X = 0: P - T_1 - T_2 - S_2 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_2 - m_2 \cdot g - N_1 = 0$$

$$T_2 = \mu_2 \cdot N_2$$

32

Przykład C-I - rozwiązanie

$$N_1 = m_1 \cdot g$$

$$T_1 = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g$$

$$S_1 = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g$$

$$S_2 = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot e^{\mu_3 \pi}$$

$$N_2 = m_2 \cdot g + m_1 \cdot g$$

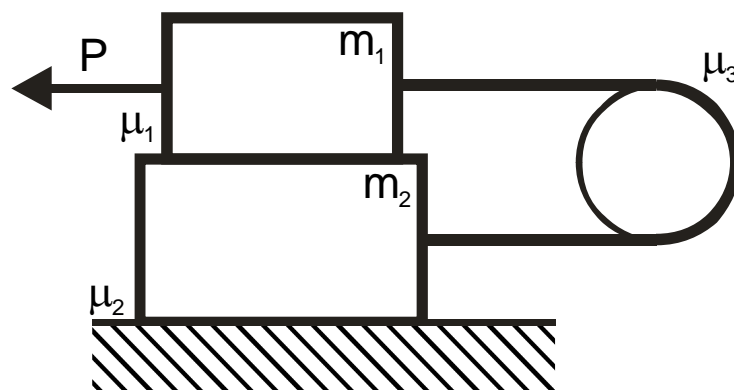
$$T_2 = \mu_2 \cdot (m_2 \cdot g + m_1 \cdot g)$$

$$P = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g + \mu_2 \cdot (m_2 \cdot g + m_1 \cdot g) + \mu_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot e^{\mu_3 \pi}$$

33

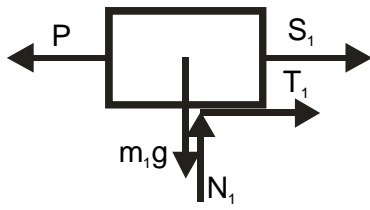
Przykład C-II (1)

- Określić graniczną wartość siły, przy przekroczeniu której może wystąpić ruch.



34

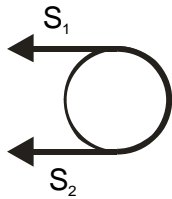
Przykład C-II (2)



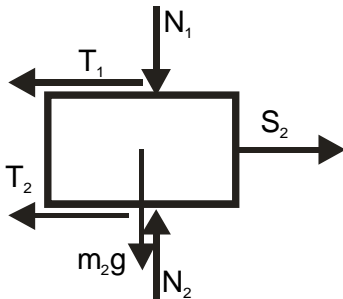
$$\sum X = 0: P - S_1 - T_1 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_1 - m_1 \cdot g = 0$$

$$T_1 = \mu_1 \cdot N_1$$



$$S_2 = S_1 \cdot e^{-\mu_3 \pi}$$



$$\sum X = 0: S_2 - T_1 - T_2 = 0$$

$$\sum Y = 0: N_2 - m_2 \cdot g - N_1 = 0$$

$$T_2 = \mu_2 \cdot N_2$$

35

Przykład C-II - rozwiązanie

$$N_1 = m_1 \cdot g$$

$$T_1 = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g$$

$$N_2 = m_2 \cdot g + m_1 \cdot g$$

$$T_2 = \mu_2 \cdot (m_2 \cdot g + m_1 \cdot g)$$

$$S_2 = \mu_1 \cdot m_1 \cdot g + \mu_2 \cdot (m_2 \cdot g + m_1 \cdot g)$$

$$S_1 = (\mu_1 \cdot m_1 \cdot g + \mu_2 \cdot (m_2 \cdot g + m_1 \cdot g)) \cdot e^{\mu_3 \pi}$$

$$P = (\mu_1 \cdot m_1 \cdot g + \mu_2 \cdot (m_2 \cdot g + m_1 \cdot g)) \cdot e^{\mu_3 \pi} + \mu_1 \cdot m_1 \cdot g$$

36