

Mechanika ogólna

Wykład nr 14

Elementy kinematyki i dynamiki

1

Kinematyka

- Dział **mechaniki** zajmujący się matematycznym opisem układów mechanicznych oraz badaniem geometrycznych właściwości ich ruchu, bez wnikania w związek między ruchem, a siłami go powodującymi.
- **Ruch** ciała – zmiana położenia w przestrzeni, względem innego ciała, które traktujemy jako nieruchome.

2

Podstawowe pojęcia

- Przestrzeń i czas;
 - Współrzędne;
 - Tor ruchu;
- Ruch postępowy:
 - Prędkość;
 - Przyspieszenie;
- Ruch obrotowy:
 - Prędkość kątowna;
 - Przyspieszenie kątowne.

3

Równania ruchu

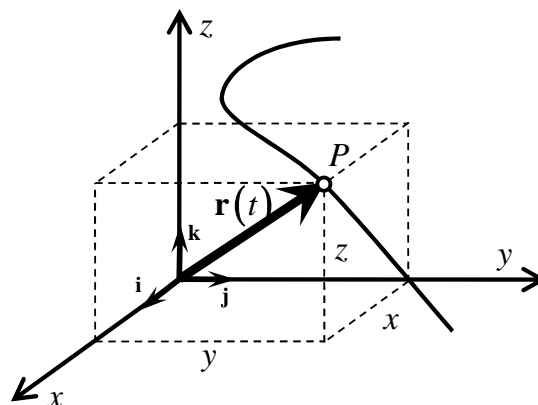
- Wektor wodzący poruszającego się punktu: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$
- Funkcje skalarne opisujące ruch punktu:

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$$

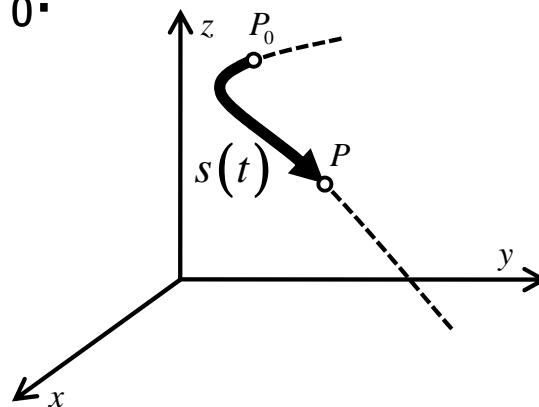


4

Równanie ruchu po torze (równanie drogi)

- Równanie opisujące ruch punktu P , gdy znany jest tor ruchu względem nieruchomego położenia początkowego P_0 :

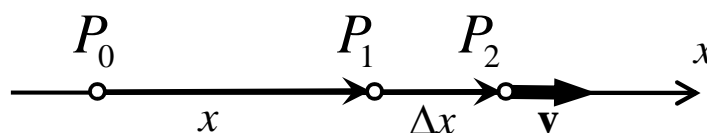
$$s = s(t)$$



5

Prędkość w ruchu prostoliniowym

- W ruchu jednostajnym: $v = |\mathbf{v}| = \left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right|$
- W dowolnym ruchu prostoliniowym:
 - Prędkość średnia: $v_{sr} = \left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right|$
 - Prędkość chwilowa: $v = |\mathbf{v}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| = \frac{dx}{dt}$



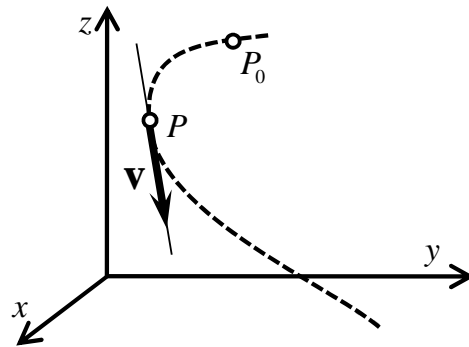
6

Prędkość w ruchu krzywoliniowym (1)

■ Prędkość punktu:

- Wektor o module równym wartości bezwzględnej pochodnej drogi po czasie, skierowany wzdłuż stycznej do toru ruchu i o zwrocie w kierunku ruchu w danej chwili.

$$v = |\mathbf{v}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right| = \frac{ds}{dt}$$



7

Prędkość w ruchu krzywoliniowym (2)

- Składowe prędkości w układzie współrzędnych równe są pochodnym po czasie odpowiednich współrzędnych:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

- Moduł prędkości (wartość liczbowa):

$$v = \left| \frac{ds}{dt} \right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

- Rzut prędkości punktu na oś układu współrzędnych równy jest prędkości z jaką porusza się rzut punktu wzdłuż osi.

8

Prędkość w ruchu krzywoliniowym ⁽³⁾

- W układzie współrzędnych prostokątnych rzuty prędkości punktu są prędkościami rzutów wektora wodzącego \mathbf{r} .
- Prędkość punktu równa jest pochodnej geometrycznej względem czasu promienia wodzącego tego punktu:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \mathbf{t} \frac{ds}{dt}$$

9

Przyspieszenie punktu

- Pierwsza pochodna prędkości względem czasu:
- $$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}$$
- Składowe w układzie kartezjańskim można wyrazić jako drugie pochodne współrzędnych:

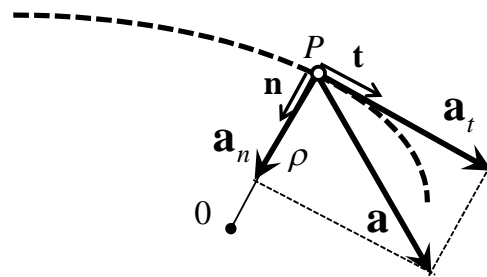
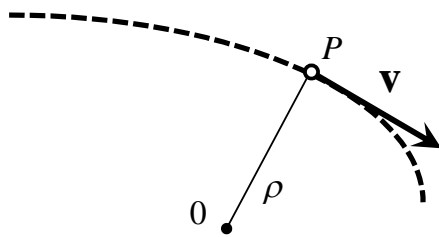
$$\begin{aligned} a_x &= \ddot{x} \\ a_y &= \ddot{y} \\ a_z &= \ddot{z} \end{aligned} \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

10

Przyspieszenie styczne i normalne do toru ruchu

- Całkowite przyspieszenie punktu jest równe sumie składowych – stycznej i normalnej do toru ruchu:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n = \frac{dv}{dt} \mathbf{t} + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n} \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$



11

Składowe przyspieszenia w ruchu po torze kołowym

- Prędkość w zależności od prędkości kątowej:

$$v = \omega r \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

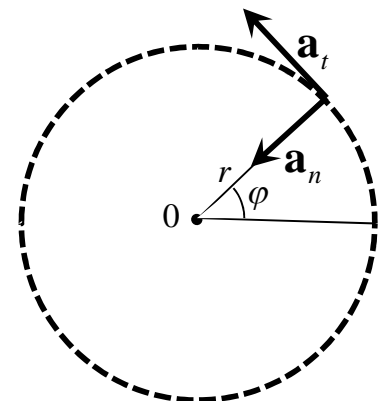
- Promień krzywizny: $\rho = r$

- Składowe przyspieszenia:

$$a_t = r \frac{d\omega}{dt} = r \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad a_n = \omega^2 r$$

- Przyspieszenie kątowe:

$$a_t = r\varepsilon \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$



12

Szczególne przypadki ruchu

- Ruch jednostajnie przyspieszony prostoliniowy;
- Ruch harmoniczny;
- Ruch krzywoliniowy ze stałym przyspieszeniem.

13

Ruch jednostajnie przyspieszony prostoliniowy

- Ruch po prostej ze stałym co do wartości i kierunku przyspieszeniem: $a_x = \ddot{x} = a = \text{const}$

- Prędkość: $v_x = \dot{x} = at + C_1$

- Położenie punktu: $x = \frac{at^2}{2} + C_1t + C_2$

- Warunki brzegowe:

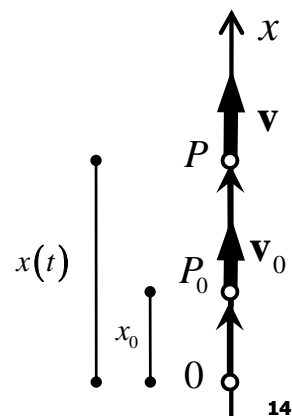
$$x(t=0) = x_0 \quad v_x(t=0) = v_{0x}$$

- Stałe całkowania: $C_1 = v_{0x} \quad C_2 = x_0$

- Równanie ruchu:

$$x = \frac{at^2}{2} + v_{0x}t + x_0$$

- Równanie prędkości: $v(t) = at + v_{0x}$



Ruch harmoniczny

- Punkt P poruszający się jednostajnie po okręgu o promieniu r :

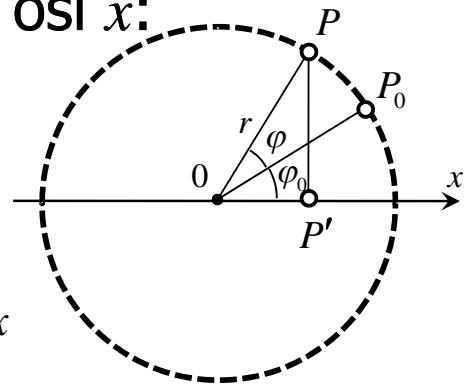
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \varphi = \omega t$$

- Ruch rzutu punktu P po osi x :

$$x = r \cos(\varphi + \varphi_0) = r \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -r\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

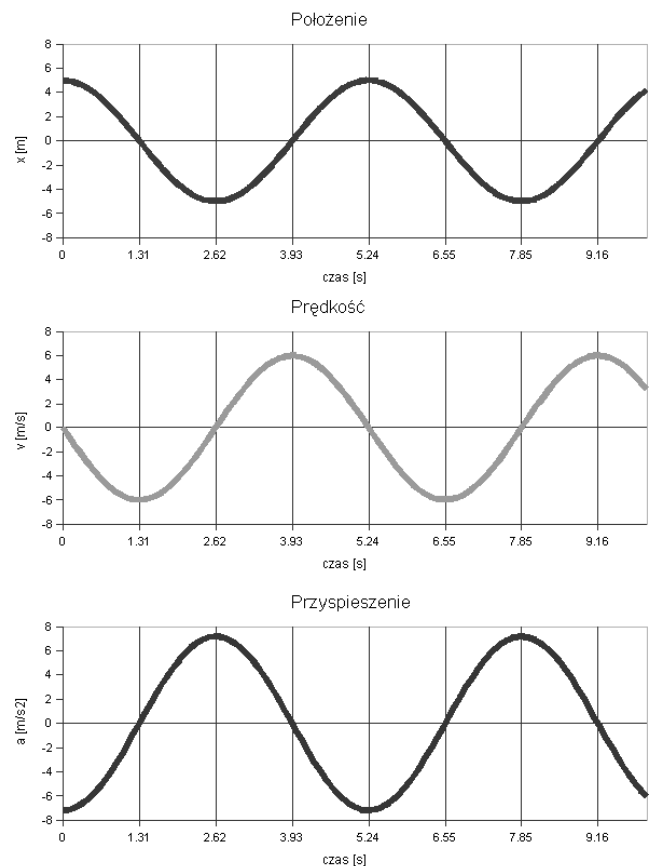
$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -r\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x$$



15

Ruch harmoniczny

- Wykresy położenia, prędkości i przyspieszenia:



16

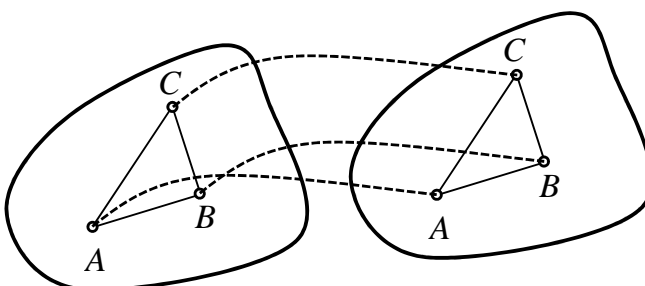
Ruch ciała sztywnego

- **Ciało sztywne** – układ punktów materialnych, których wzajemne odległości pozostają niezmiennie.
- Ruch postępowy;
- Ruch obrotowy;
- Złożenie ruchów:
 - Ruch płaski;
 - Ruch kulisty.

17

Ruch postępowy ciała sztywnego

- W ruchu **postępowym** prędkości i przyspieszenia wszystkich punktów ciała są jednakowe. Punkty ciała poruszają się po jednakowych równoległych przesuniętych torach.



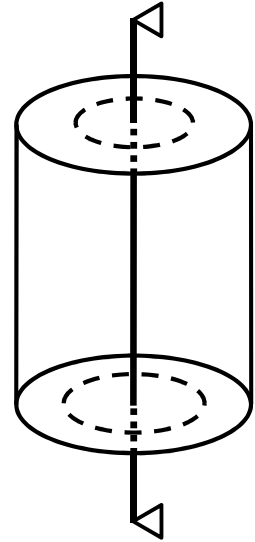
$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C$$

$$\mathbf{p}_A = \mathbf{p}_B = \mathbf{p}_C$$

18

Ruch obrotowy ciała sztywnego

- Ruch **obrotowy** wokół nieruchomej osi obrotu (środek obrotu w ruchu płaskim).
- Torami punktów ciała są okręgi w płaszczyznach prostopadłych do osi obrotu i środkach leżących na tej osi.



19

Ruch obrotowy ciała sztywnego

- Równanie ruchu obrotowego ciała sztywnego:

$$s = r \varphi(t)$$

- Prędkość liniowa:

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\varphi(t)}{dt} = r \omega(t)$$

- Prędkość kątowa:

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

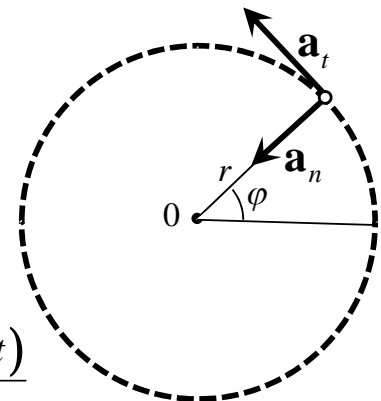
- Przyspieszenie kątowe:

$$\varepsilon(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}$$

- Składowe przyspieszenia liniowego:

$$a_t = r \frac{d\omega}{dt} = r \frac{d^2\varphi}{dt^2} = r\varepsilon$$

$$a_n = \omega^2 r$$



20

Dynamika

- Dział **mechaniki** zajmujący się badaniem związków między ruchem punktów materialnych i ciał sztywnych oraz sił go wywołujących.
- Dynamika bada zależności między takimi wielkościami jak: siła, przyspieszenie, prędkość, pęd, kręt, praca, energia itd.

21

Pierwsza zasada dynamiki Newtona

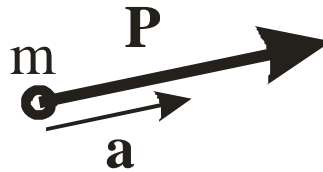
- **Prawo bezwładności:**
 - Z punktu widzenia dynamiki jest wszystko jedno, czy ciało się porusza ruchem jednostajnym prostoliniowym, czy jest w spoczynku.
 - W obu przypadkach siły działające na ciało są w równowadze.
 - Można zawsze założyć istnienie nieruchomego układu odniesienia.

22

Druga zasada dynamiki Newtona

- Pod działaniem stałej siły punkt materialny porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym po linii prostej.
- Przyspieszenie z jakim porusza się punkt jest wprost proporcjonalne do działającej siły (wypadkowej układu sił), a odwrotnie proporcjonalne do masy ciała.

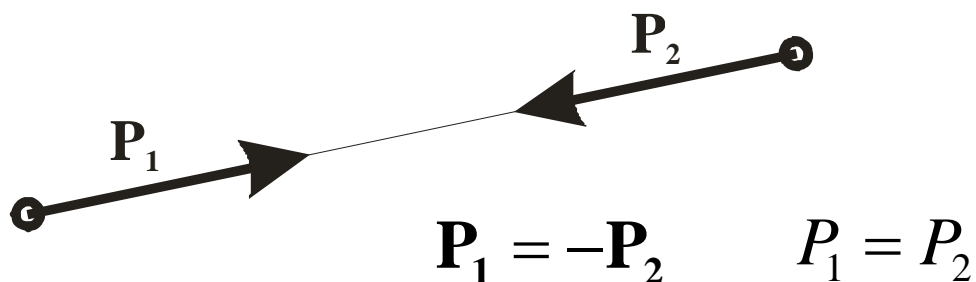
$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{P}}{m}$$



23

Trzecia zasada dynamiki Newtona

- Siły wzajemnego oddziaływania dwóch punktów materialnych równoważą się, tj. mają jednakowe moduły i kierunki, zaś zwroty przeciwne.



24

Zasada superpozycji

- Efekt działania kilku wpływów na ciało można wyrazić jako sumę efektów ich działania.
- Przyspieszenie z jakim porusza się ciało pod wpływem układu sił (siły wypadkowej) może zostać obliczone jako suma przyspieszeń powodowanych przez każdą z sił składowych.

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2 + \dots + m\mathbf{a}_n = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_n = \mathbf{P}$$

25

Prawo grawitacji

- Dwa ciała działają na siebie wzajemnie jednakowymi co do wartości i przeciwnie zwróconymi siłami o wartości odwrotnie proporcjonalnej do kwadratu odległości między ich środkami i wprost proporcjonalnej do iloczynu mas tych ciał.

$$\mathbf{P} = \mathbf{G} \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

26

Równania ruchu punktu materialnego

- Dynamiczne równanie różniczkowe ruchu punktu materialnego:

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = m \cdot \ddot{\mathbf{r}} = m \cdot \mathbf{a} = \mathbf{P}$$

- Dynamiczne różniczkowe równania ruchu we współrzędnych prostokątnych:

$$m \cdot \ddot{x} = m \cdot a_x = \sum_i P_{ix} \quad m \cdot \ddot{y} = m \cdot a_y = \sum_i P_{iy}$$
$$m \cdot \ddot{z} = m \cdot a_z = \sum_i P_{iz}$$

27

Skalarne równania ruchu

- Rzutowanie przyspieszenia na osie normalną, styczną i binormalną:

$$m \cdot a_n = m \frac{v^2}{\rho} = \sum_i P_{in} \quad m \cdot a_t = m \frac{dv}{dt} = \sum_i P_{it}$$

$$m \cdot a_b = \sum_i P_{ib} \quad a_b = 0$$

- Wektor przyspieszenia całkowitego leży na płaszczyźnie ściśle stycznej do toru.

28

Pierwsze i drugie zadanie dynamiki

- Pierwsze zadanie dynamiki:
 - Dana jest masa i równania ruchu punktu materialnego, należy wyznaczyć siły działające na ten punkt;
- Drugie zadanie dynamiki:
 - Dana jest masa i siły działające na punkt materialny, należy wyznaczyć równania ruchu tego punktu.

29

Pierwsze zadanie dynamiki

- Równanie ruchu:
- Składowe wypadkowej we współrzędnych prostokątnych:

$$m \cdot \mathbf{a} = m \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{P}$$

$$P_x = m\ddot{x} \quad P_y = m\ddot{y} \quad P_z = m\ddot{z}$$

- Wartość i kierunek wypadkowej:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$$

$$\cos \angle(\mathbf{P}, \mathbf{i}) = \frac{P_x}{P} \quad \cos \angle(\mathbf{P}, \mathbf{j}) = \frac{P_y}{P} \quad \cos \angle(\mathbf{P}, \mathbf{k}) = \frac{P_z}{P}$$

30

Drugie zadanie dynamiki

■ Ruch punktu pod działaniem siły:

- Stałej co do wartości i kierunku;

$$\mathbf{P} = \text{const}$$

- Zależnej od czasu;

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$$

- Zależnej od prędkości;

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(v)$$

- Zależnej od położenia.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(x)$$

31

Ruch pod działaniem stałej siły ⁽¹⁾

■ Rzut ukośny:

■ Równania ruchu:

$$m\ddot{x} = 0 \quad m\ddot{y} = -mg$$

■ Składowe przyspieszeń:

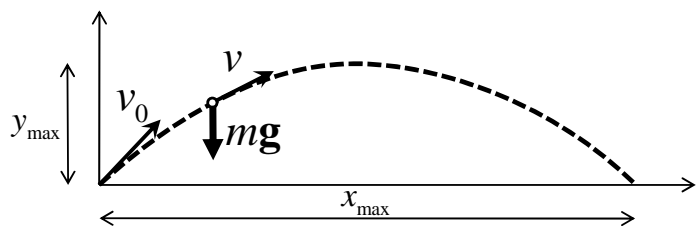
$$a_x = 0 \quad a_y = -g$$

■ Składowe prędkości:

$$v_x = C_1 \quad v_y(t) = -gt + C_2$$

■ Równania ruchu:

$$x(t) = C_1 t + C_3 \quad y(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_2 t + C_4$$



32

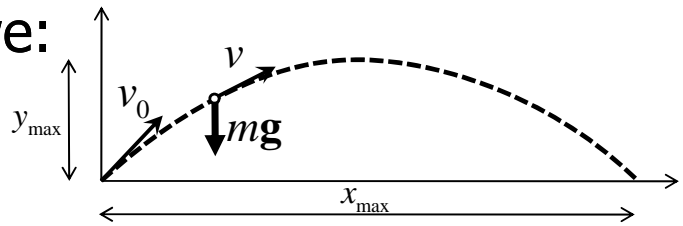
Ruch pod działaniem stałej siły ⁽²⁾

Warunki brzegowe:

$$v_x(t=0) = v_{0x} = v_0 \cos \alpha$$

$$v_y(t=0) = v_{0y} = v_0 \sin \alpha$$

$$x(t=0) = 0 \quad y(t=0) = 0$$



Stałe całkowania:

$$C_1 = v_0 \cos \alpha \quad C_2 = v_0 \sin \alpha \quad C_3 = 0 \quad C_4 = 0$$

Równania prędkości:

$$v_x = v_0 \cos \alpha \quad v(t) = -gt + v_0 \sin \alpha$$

Równania ruchu

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha \quad y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha$$

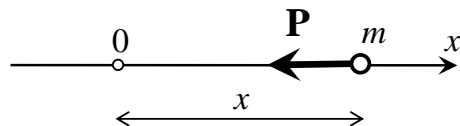
33

Ruch pod działaniem siły zależnej od położenia

Drgania liniowe:

Różniczkowe równanie ruchu:

$$P_x = ma_x = m\ddot{x} = -kx \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



Rozwiązanie ogólne:

$$x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

$$x = a \sin(\omega t + \varphi_0) \quad C_1 = a \cos \varphi_0 \quad C_2 = a \sin \varphi_0$$

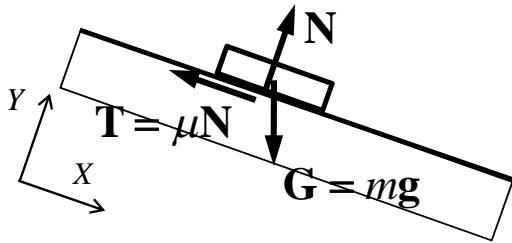
(Równanie ruchu harmonicznego prostego)

34

Ruch nieswobodnego punktu materialnego

- W przypadku, gdy warunki zewnętrzne ograniczają swobodę ruchu, w równaniu ruchu należy uwzględnić także siły bierne (reakcje więzów):

$$m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{P} + \mathbf{R}$$



$$m\mathbf{a}_x = \sum \mathbf{P}_x$$

$$0 = m\mathbf{a}_y = \sum \mathbf{P}_y$$

35

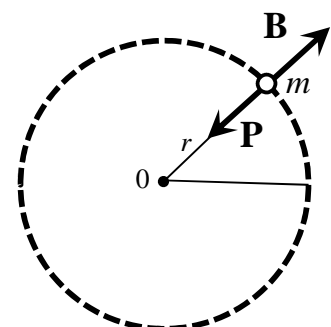
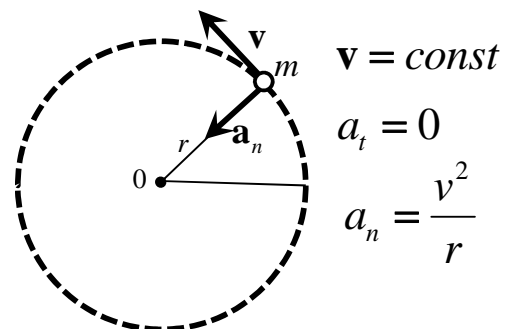
Siła bezwładności

- Równanie ruchu:
 $\mathbf{P} = m\mathbf{a} \quad \mathbf{P} - m\mathbf{a} = 0$
- Siła bezwładności (d'Alemberta):

$$\mathbf{B} = -m\mathbf{a}$$

- Zasada d'Alemberta:
 - Siły rzeczywiste działające na punkt materialny równoważą się z siłą bezwładności tego punktu.

$$\mathbf{P} + \mathbf{B} = 0$$



36