

# Mechanika ogólna

Wykład nr 2

**Wypadkowa dowolnego układu sił.**

**Równowaga.**

**Rodzaje sił i obciążeń.**

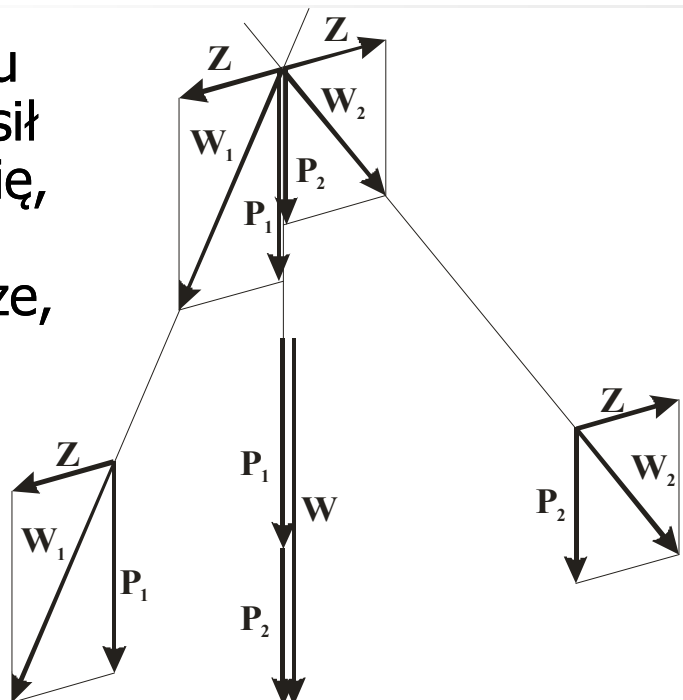
**Rodzaje ustrojów prętowych.**

**Wyznaczanie reakcji.**

1

## Wypadkowa układu sił równoległych

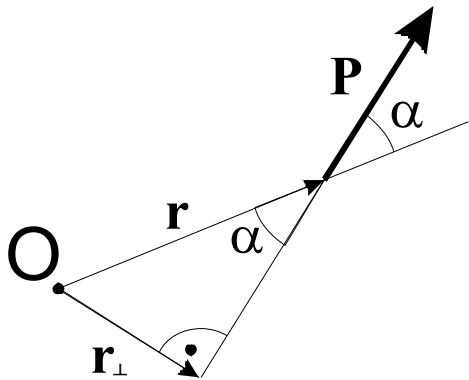
- Przyłożenie układu zerowego (układ sił równoważących się, np. dwie siły o takiej samej mierze, linii działania i przeciwnych zwrotach) nie wpływa na stan równowagi ciała.



2

# Moment siły <sup>(1)</sup>

- **Moment siły względem punktu** – iloczyn wektorowy promienia wodzącego, czyli wektora łączącego omawiany punkt i punkt przyłożenia siły, oraz wektora siły:



$$\mathbf{M}_O^P = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$$

$$M_O^P = r \cdot P \sin \alpha$$

$$r_{\perp} = r \cdot \sin \alpha$$

$$M_O^P = r_{\perp} \cdot P$$

3

# Moment siły <sup>(2)</sup>

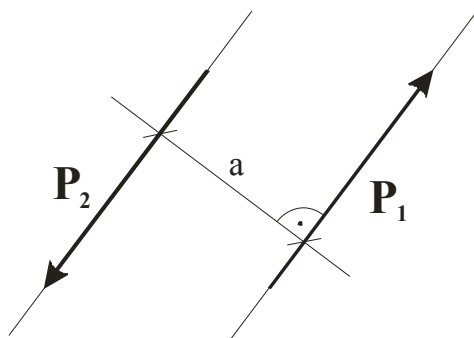
- **Moment siły względem prostej** - Momentem względem prostej nazywamy iloczyn wektorowy promienia wodzącego, czyli wektora łączącego punkt prostej najbliższy kierunkowi siły i punkt przyłożenia siły, i wektora siły:

$$\mathbf{M}_l = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$$

4

# Para sił

- **Parę sił** stanowią dwie siły o równoległych liniach działania, o przeciwnych zwrotach, zaś o tych samych miarach.
- **Ramię pary sił** – odległość pomiędzy kierunkami sił nosi nazwę ramienia pary sił.



$$P_1 = P_2 = P$$

$$M = Pa$$

5

## Dowolny płaski układ sił <sup>(1)</sup>

- Redukcja do siły wypadkowej przyłożonej w biegunie redukcji i wypadkowego momentu względem tego bieguna.
- Siły składowe mogą zostać przeniesione do bieguna redukcji, pod warunkiem przyłożenie momentu od tych sił względem bieguna redukcji.

6

# Dowolny płaski układ sił (2)

- Wypadkową siłę wyznacza się dla układu zbieżnego przyłożonego w biegunie redukcji.

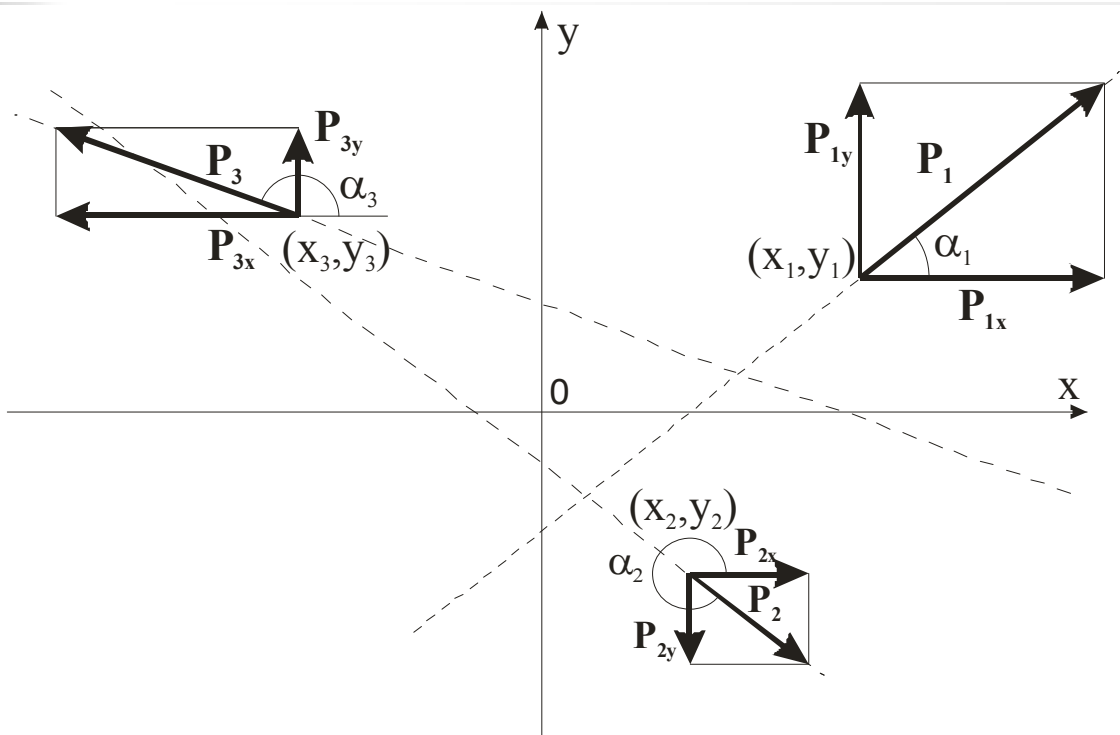
$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i$$

- Wypadkowy moment jest równy sumie momentów od sił składowych.

$$\mathbf{M}_o = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{io}$$

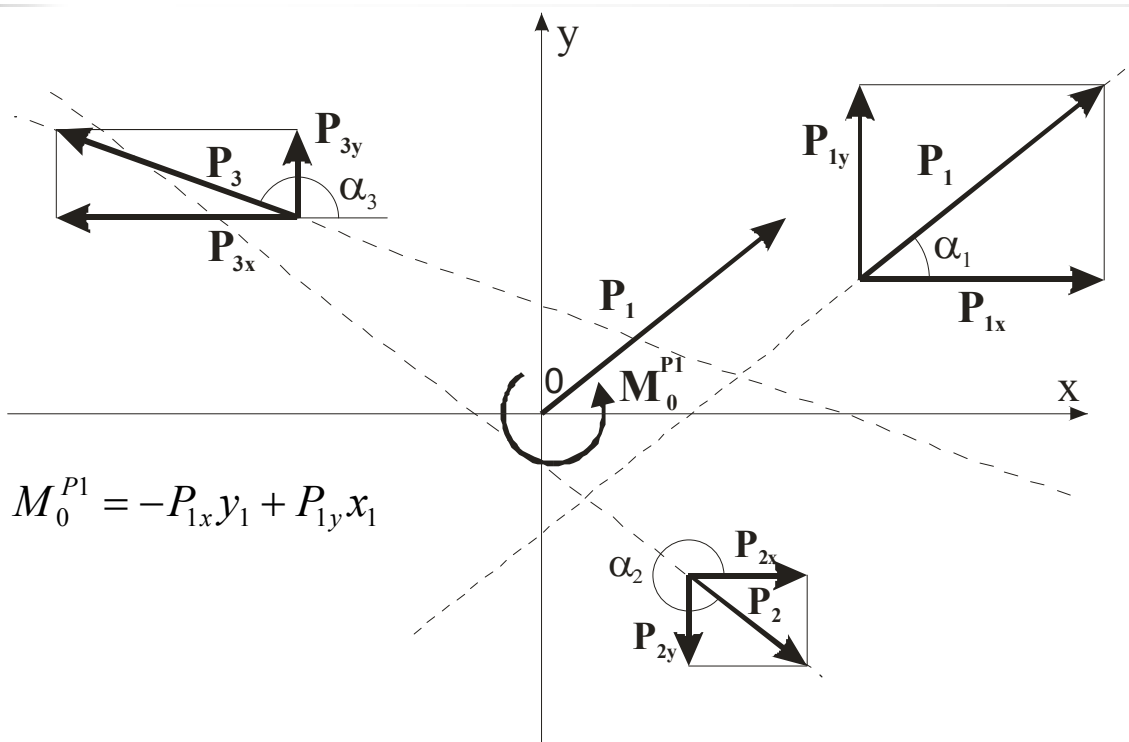
7

## Przykład (1)



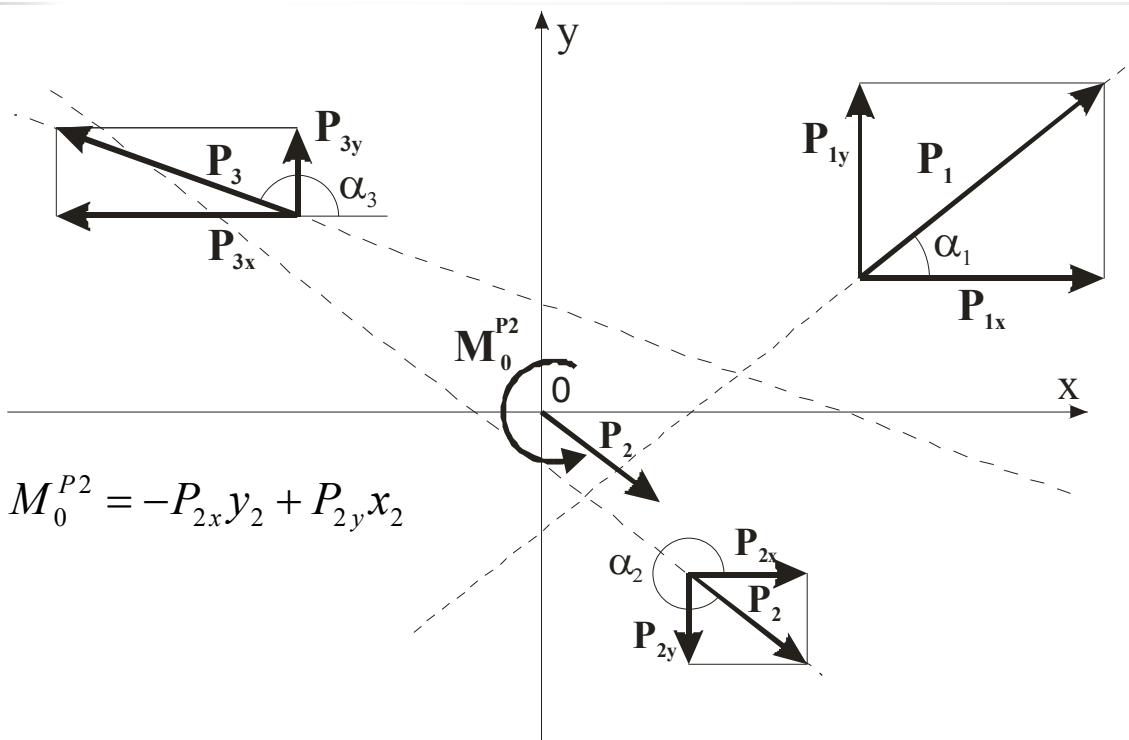
8

## Przykład (2)



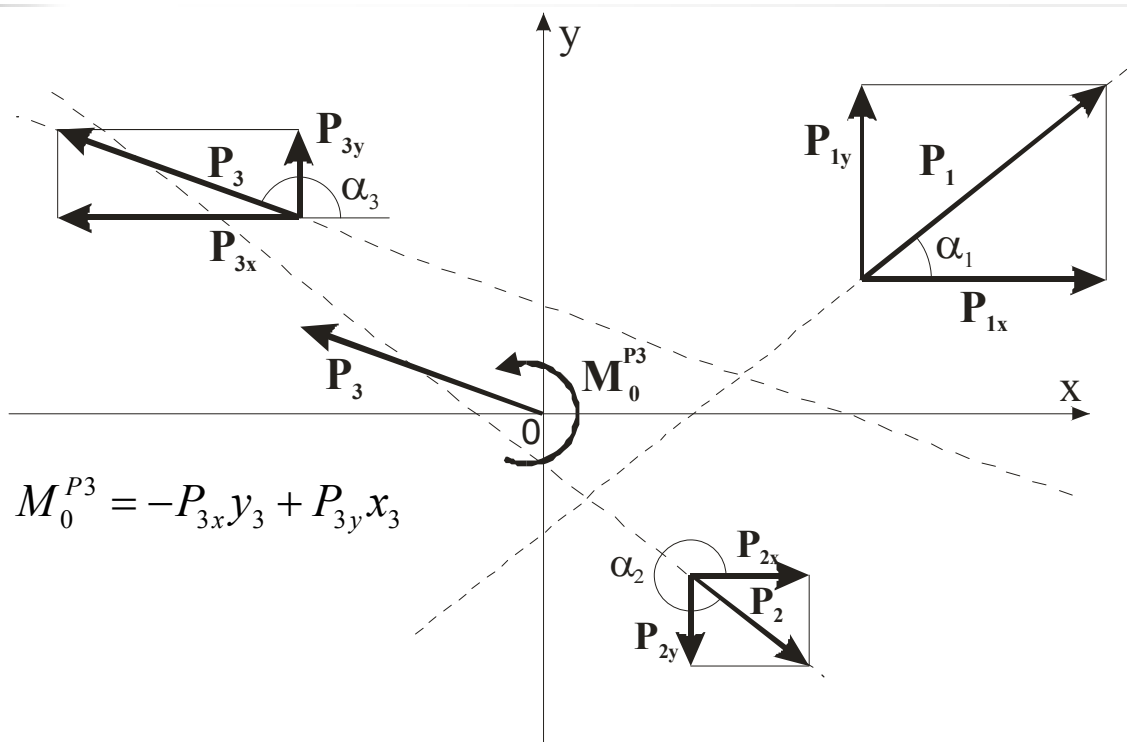
9

## Przykład (3)



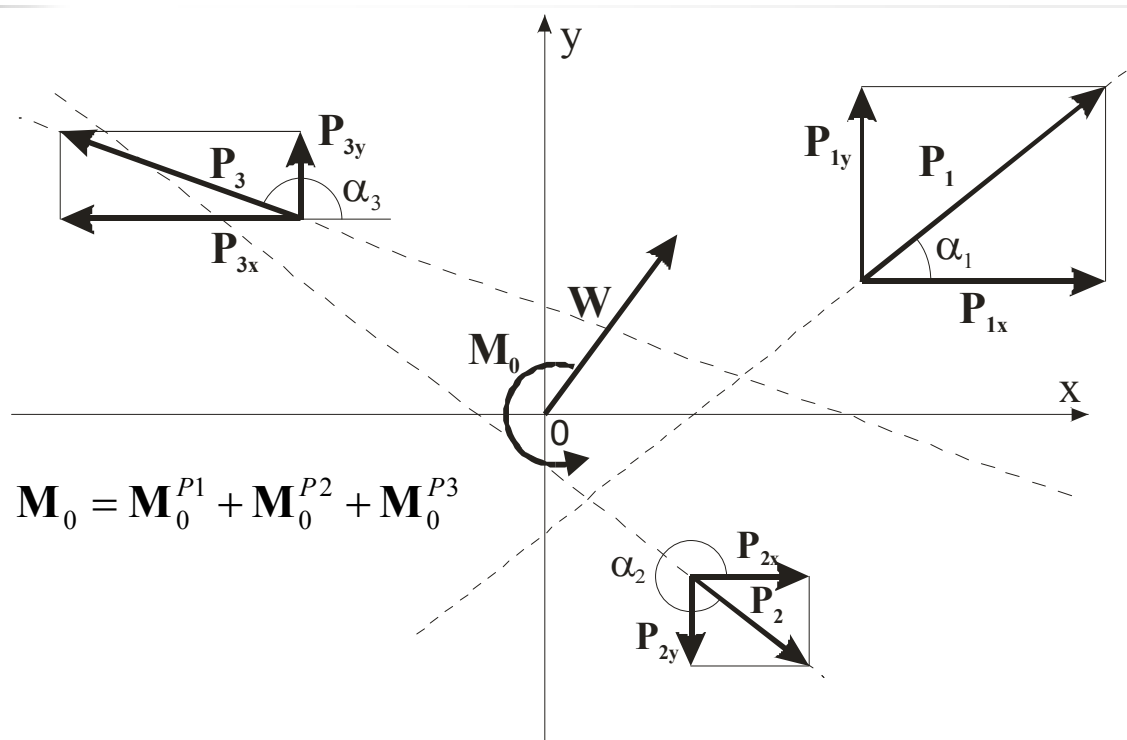
10

# Przykład (4)



11

# Przykład (5)



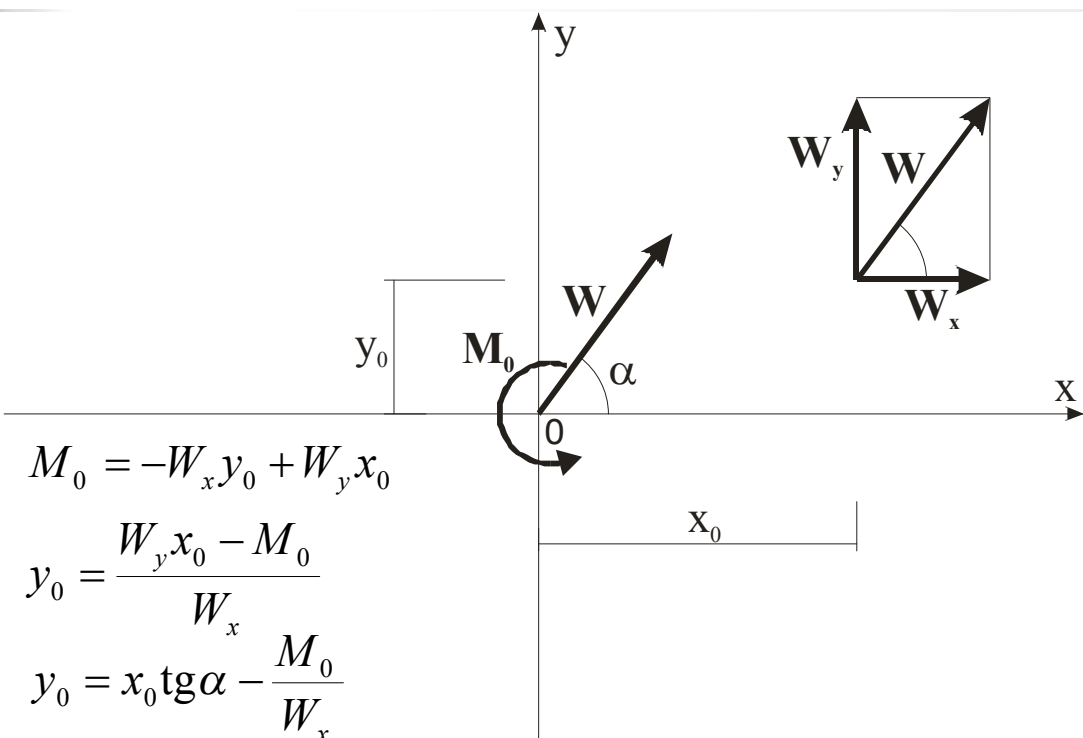
12

# Dowolny płaski układ sił <sup>(3)</sup>

- Wypadkowy moment może zostać przedstawiony jako:
  - wektor momentu;
  - para sił;
  - moment od siły wypadkowej przyłożonej nie w biegunie redukcji, a na linii działania wyznaczonej w taki sposób, że moment od siły wypadkowej równy jest momentowi od sił składowych.

13

## Moment od wypadkowej



14

# Uogólnienie w przestrzeni

- Układ sił **zbieżnych** – redukcja do siły wypadkowej przyłożonej w punkcie zbieżności.
- **Dowolny** przestrzenny układ sił – redukcja do wypadkowej siły i wypadkowego momentu.

15

## Stan równowagi

- **Równowaga statyczna**

Punkt materialny (ciało sztywne) jest w równowadze, jeżeli pod wpływem układu sił, nie porusza się on lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Taki układ sił nazywa się zrównoważonym lub równoważnym zeru.

16



# Oswobodzenie z więzów

- Ciało nieswobodne można myślowo oswobodzić z więzów, zastępując ich działanie reakcjami.
- Ciało oswobodzone z więzów można traktować jako swobodne pod działaniem sił czynnych (obciążeń) i biernych (reakcji).

17

# Rodzaje sił w mechanice

- W mechanice wyróżnia się następujące rodzaje sił:
  - **siły zewnętrzne** - obciążenie pochodzące od innych ciał;
  - **reakcje** - siły zewnętrzne wynikające ze sposobu zamocowania konstrukcji;
  - **siły wewnętrzne** - wzajemne oddziaływanie pomiędzy częściami ciała.

18

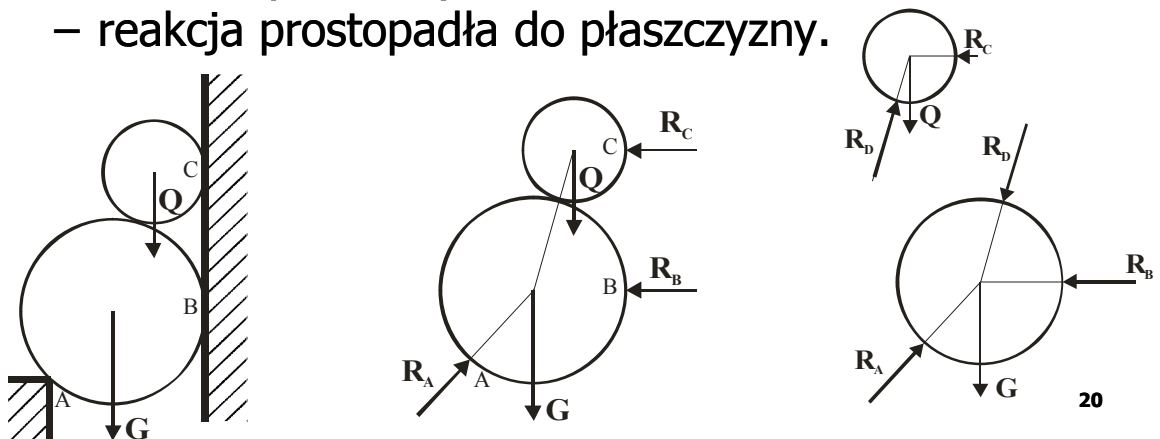
# Więzy – nacisk <sup>(1)</sup>

- Powierzchnia płaska na płaszczyźnie:
  - reakcja prostopadła do płaszczyzny styku;
- Przekrój kołowy na płaszczyźnie:
  - reakcja prostopadła do płaszczyzny styku (stycznej w punkcie styczności);



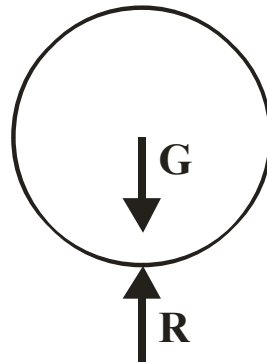
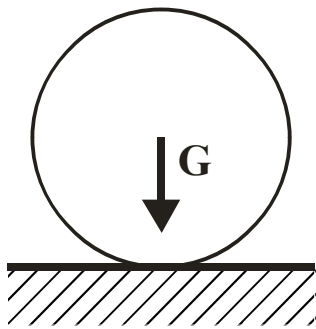
# Więzy – nacisk <sup>(2)</sup>

- Przekrój kołowy oparty o przekrój kołowy:
  - reakcja prostopadła do stycznej obu ciał w punkcie styku (wzdłuż prostej łączącej środki okręgów);
- Punkt na płaszczyźnie:
  - reakcja prostopadła do płaszczyzny.



# Równowaga dwóch sił

- Układ dwóch sił pozostaje w równowadze, jeżeli siły te leżą na jednej prostej, mają przeciwne zwroty i takie same miary.



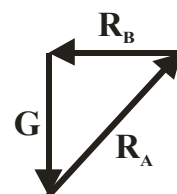
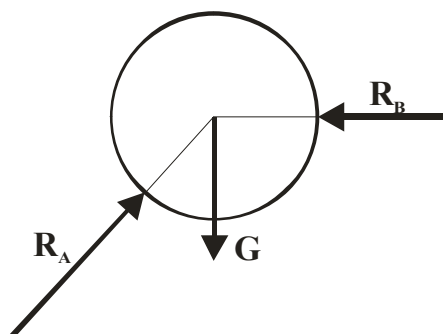
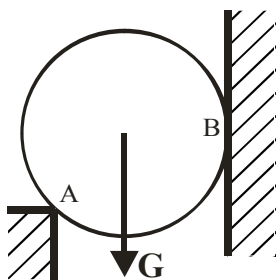
$$R = -G$$

$$R = G$$

21

# Równowaga trzech sił

- Układ trzech sił jest zrównoważony, jeżeli siły te tworzą płaski układ sił, przecinają się w jednym punkcie, zaś wielobok sznurowy zbudowany z tych sił jest zamknięty.



22

# Równania równowagi punktu materialnego

- II zasada dynamiki Newtona:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{a}$$

- Jeżeli punkt materialny jest w stanie równowagi statycznej, to:

$$\mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{P} = 0$$

23

# Równania równowagi ciała sztywnego (siły zbieżne)

- II zasada dynamiki Newtona:

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4 + \dots + \mathbf{P}_n = m\mathbf{a}$$

- Jeżeli punkt materialny jest w stanie równowagi statycznej, to:

$$\mathbf{a} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i = 0$$

24

# Układ sił zbieżnych

- Układ sił, przyłożonych do ciała sztywnego, których kierunki działania **przecinają się w jednym punkcie**. Układ takich sił jest w równowadze, jeżeli wypadkowa sił jest równa zeru lub mówiąc inaczej, jeżeli wektory sił tworzą wielobok zamknięty.

$$W = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots + P_n = \sum_{i=1}^n P_i = 0$$

25

# Płaski układ sił zbieżnych

- Układ sił, przyłożonych do ciała sztywnego, których kierunki działania **leżą w jednej płaszczyźnie i przecinają się w jednym punkcie**. Układ takich sił jest w równowadze, jeżeli wypadkowa sił jest równa zeru lub mówiąc inaczej, jeżeli wektory sił tworzą wielobok zamknięty.

$$W = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots + P_n = \sum_{i=1}^n P_i = 0$$

26

# Równania równowagi układu sił zbieżnych

- Aby siły zbieżne były w równowadze, sumy rzutów tych sił na osie układu współrzędnych muszą być równe zero.

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0.$$

27

# Równania równowagi płaskiego układu sił zbieżnych

- Aby siły zbieżne, leżące w jednej płaszczyźnie, były w równowadze, sumy rzutów tych sił na osie układu współrzędnych muszą być równe zero.

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0.$$

28

# Warunki równowagi układu zbieżnego (podsumowanie)

Wypadkowa układu sił musi być równa 0, tj. zamyka się wielobok sznurowy sił (graficznie), a sumy rzutów sił układu na osie układu współrzędnych muszą być równe zero (analitycznie).

## ■ Przestrzenny układ sił

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0$$

## ■ Płaski układ sił

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0;$$

29

# Równania równowagi ciała sztywnego (dowolny układ sił)

$$\mathbf{M}_o = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{a}) = -\mathbf{a} \times \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i$$

- Jeżeli ciało sztywne jest w stanie równowagi statycznej, to dodatkowo:

$$\mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{M}_o = 0$$

30

# Warunki równowagi dowolnego układu sił (1)

## ■ Płaski układ sił

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iO} = 0$$

lub

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iA} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iB} = 0 \quad AB \not\parallel x$$

lub

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iB} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iC} = 0 \quad A, B, C \notin l$$

31

# Warunki równowagi dowolnego układu sił (2)

## ■ Przestrzenny układ sił

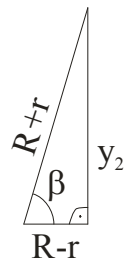
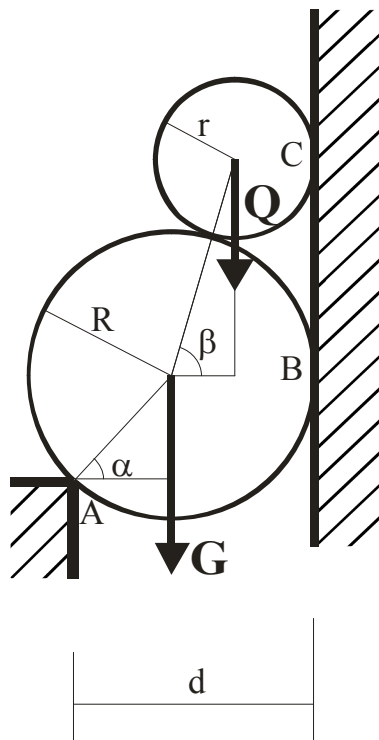
$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0$$

32



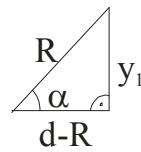
# Przykład (dwa układy zbieżne) (1)



$$y_2 = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2}$$

$$\sin \beta = \frac{y_2}{R+r}$$

$$\cos \beta = \frac{R-r}{R+r}$$



$$y_1 = \sqrt{R^2 - (d-R)^2}$$

$$\sin \alpha = \frac{y_1}{R}$$

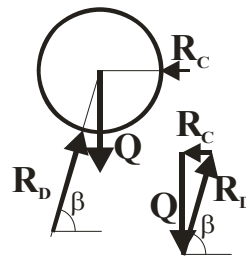
$$\cos \alpha = \frac{d-r}{R}$$

33

# Przykład (dwa układy zbieżne) (2)

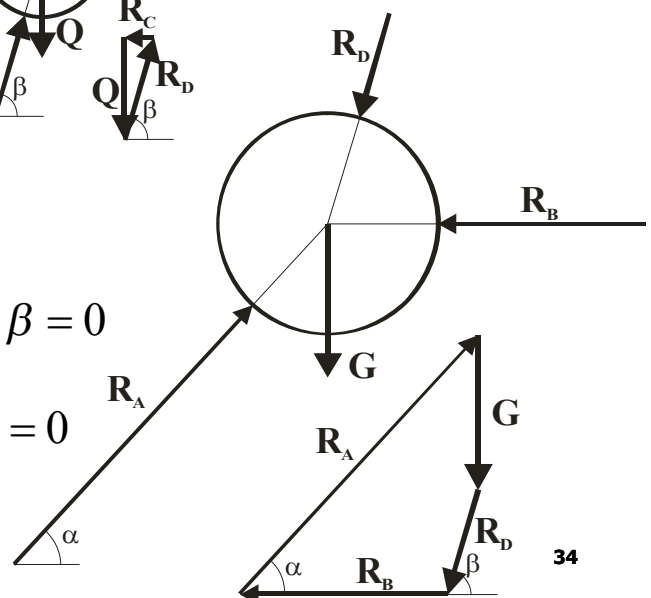
$$\sum X = R_D \cos \beta - R_C = 0$$

$$\sum Y = R_D \sin \beta - Q = 0$$



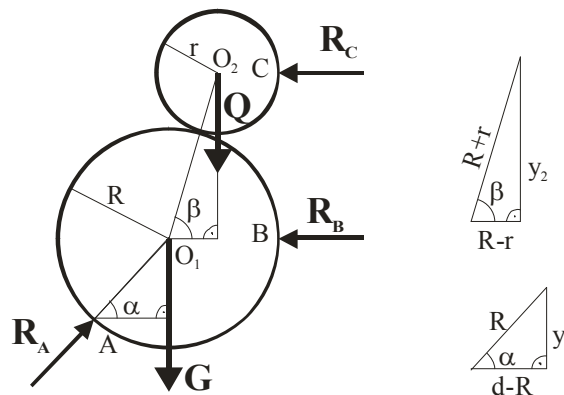
$$\sum X = R_A \cos \alpha - R_B - R_D \cos \beta = 0$$

$$\sum Y = R_A \sin \alpha - G - R_D \sin \beta = 0$$



34

# Przykład (układ niezbieżny)



$$\sum X = R_A \cos \alpha - R_B - R_C = 0$$

$$\sum Y = R_A \sin \alpha - Q - G = 0$$

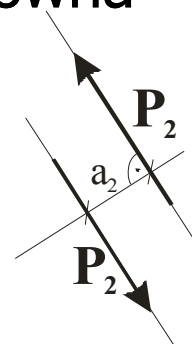
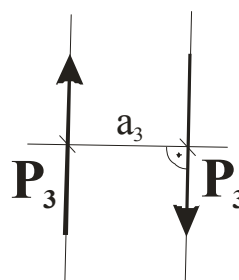
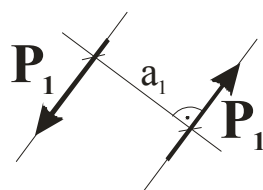
$$\sum M_{o1} = R_C \cdot y_2 - Q \cdot (R - r) = 0$$

35

## Równowaga par sił

- Aby układ par sił, działających w jednej płaszczyźnie na ciało sztywne, znajdował się w równowadze, suma momentów tych par musi być równa zero.

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0$$



36