

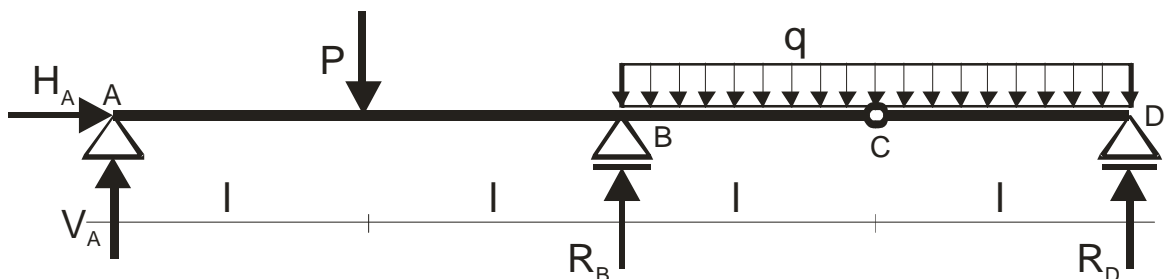
Mechanika ogólna

Wykład nr 4

Reakcje w układach z przegubami.

1

Reakcje – belki przegubowe (1)



$$\sum X : H_A = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B + R_D - P - q \cdot 2l = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot 2l + R_D \cdot 4l - P \cdot l - q \cdot 2l \cdot 3l = 0$$

$$\sum M_C^p : R_D \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

2

Rozwiązanie

$$\sum X : H_A = 0$$

$$\sum M_C^p : R_D \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow R_D = q \cdot \frac{l}{2}$$

$$\sum M_A : R_B \cdot 2l + R_D \cdot 4l - P \cdot l - q \cdot 2l \cdot 3l = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{-R_D \cdot 4l + P \cdot l + q \cdot 2l \cdot 3l}{2l} = -2R_D + \frac{P}{2} + q \cdot 3l = \frac{P}{2} + q \cdot 2l$$

$$\sum Y : V_A + R_B + R_D - P - q \cdot 2l = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_A = P + q \cdot 2l - R_B - R_D = P + q \cdot 2l - \frac{P}{2} - q \cdot 2l - q \cdot \frac{l}{2} = \frac{P}{2} - q \cdot \frac{l}{2}$$

3

Podstawienie danych

$$q = 5 \text{ kN/m}$$

$$P = 10 \text{ kN}$$

$$l = 2 \text{ m}$$

$$H_A = 0$$

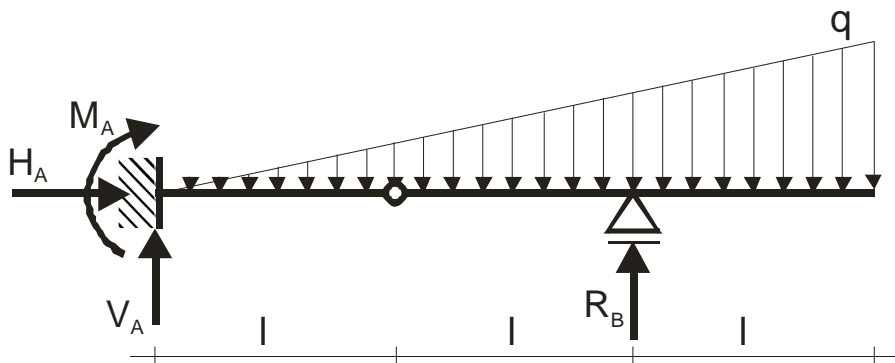
$$R_D = q \cdot \frac{l}{2} = 5 \text{ kN/m} \cdot \frac{2 \text{ m}}{2} = 5 \text{ kN}$$

$$R_B = \frac{P}{2} + q \cdot 2l = \frac{10 \text{ kN}}{2} + 5 \text{ kN/m} \cdot 2 \cdot 2 \text{ m} = 25 \text{ kN}$$

$$V_A = \frac{10 \text{ kN}}{2} - 5 \text{ kN/m} \cdot \frac{2 \text{ m}}{2} = 0$$

4

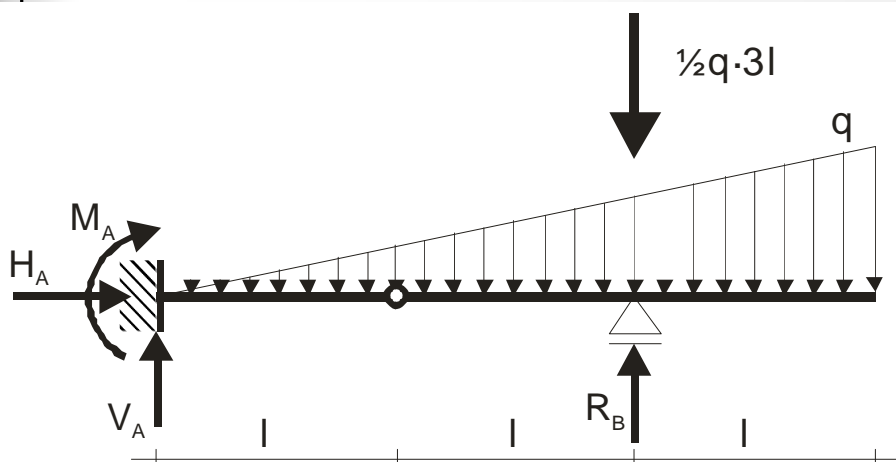
Reakcje – belki przegubowe (2)



$$\sum X : H_A = 0$$

5

Wypadkowa obciążenia trójkątnego

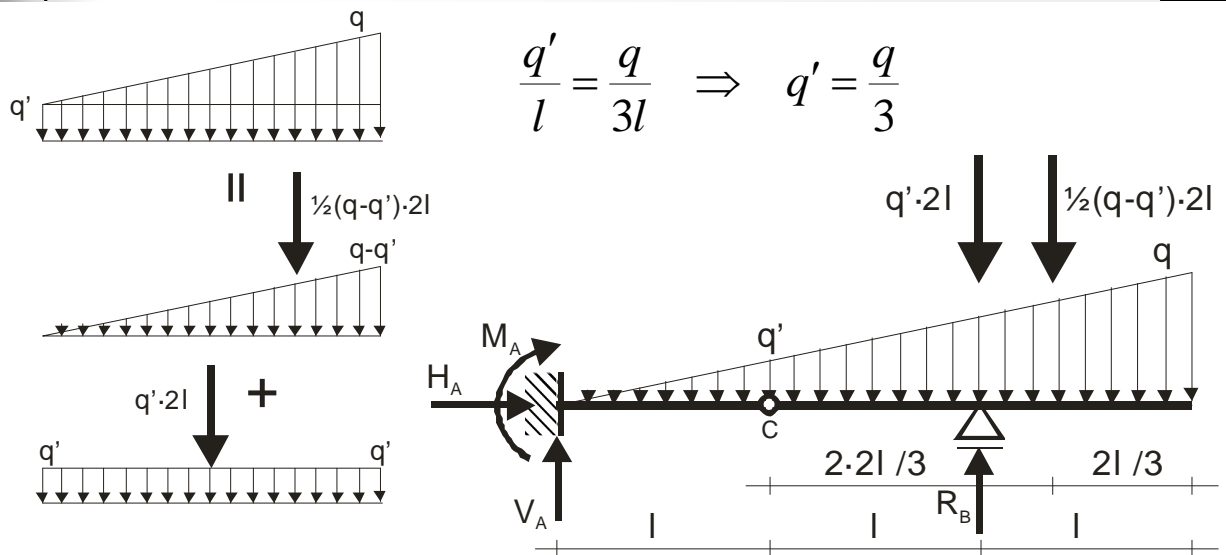


$$\sum Y : V_A + R_B - \frac{1}{2}q \cdot 3l = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot 2l - M_A - \frac{1}{2}q \cdot 3l \cdot 2l = 0$$

6

Suma momentów względem przegubu



$$\frac{q'}{l} = \frac{q}{3l} \Rightarrow q' = \frac{q}{3}$$

$$\sum M_C^P : R_B \cdot l - q' \cdot 2l \cdot l - \frac{1}{2}(q - q') \cdot 2l \cdot 2 \frac{2l}{3} = 0 \quad ,$$

Rozwiązanie

$$\sum X : H_A = 0 \quad \sum M_C^P : R_B \cdot l - \frac{q}{3} \cdot 2l^2 - \frac{1}{2} \frac{2q}{3} \cdot \frac{8l^2}{3} = 0$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{2}{3} \cdot ql + \frac{8}{9} \cdot ql = \frac{14}{9} \cdot ql$$

$$\sum Y : V_A + R_B - \frac{1}{2} q \cdot 3l = 0$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{3}{2} \cdot ql - \frac{14}{9} \cdot ql = -\frac{1}{18} \cdot ql$$

$$\sum M_A : R_B \cdot 2l - M_A - \frac{1}{2} q \cdot 3l \cdot 2l = 0$$

$$\Rightarrow M_A = \frac{14}{9} \cdot 2ql^2 - 3ql^2 = \frac{1}{9} \cdot ql^2 \quad ,$$

Podstawienie danych

$$q = 10 \text{ kN} / \text{m}$$

$$l = 1,5 \text{ m}$$

$$H_A = 0$$

$$V_A = -\frac{1}{18} \cdot ql = -\frac{1}{18} \cdot 10 \text{ kN} / \text{m} \cdot 1,5 \text{ m} = -0,833 \text{ kN}$$

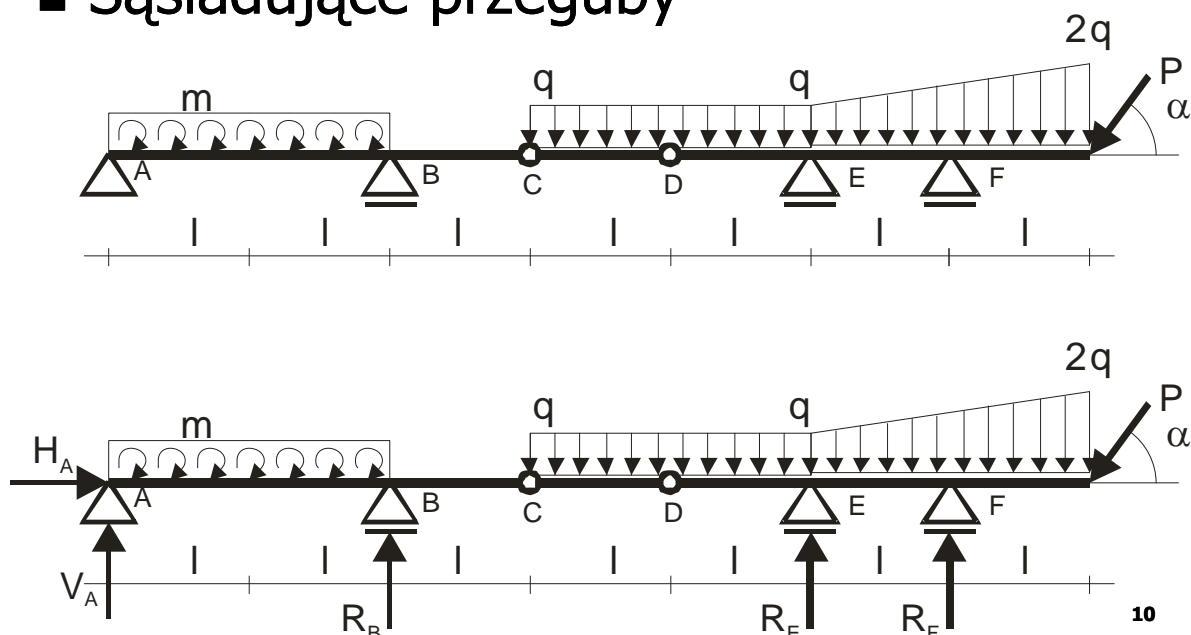
$$R_B = \frac{14}{9} \cdot ql = \frac{14}{9} \cdot 10 \text{ kN} / \text{m} \cdot 1,5 \text{ m} = 23,333 \text{ kN}$$

$$M_A = \frac{1}{9} \cdot ql^2 = \frac{1}{9} \cdot 10 \text{ kN} / \text{m} \cdot (1,5 \text{ m})^2 = 2,5 \text{ kNm}$$

9

Belki przegubowe (3)

■ Sąsiadujące przeguby



10

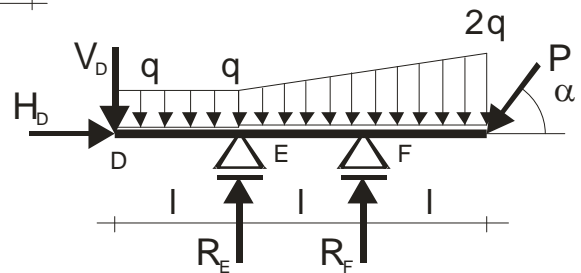
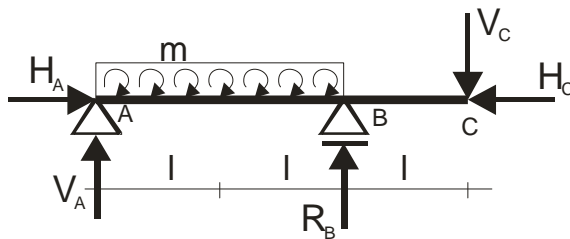
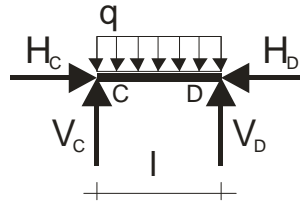
Belki proste – równania równowagi

- 9 niewiadomych – 9 równań

$$\sum X = 0$$

$$\sum Y = 0$$

$$\sum M_C = 0$$

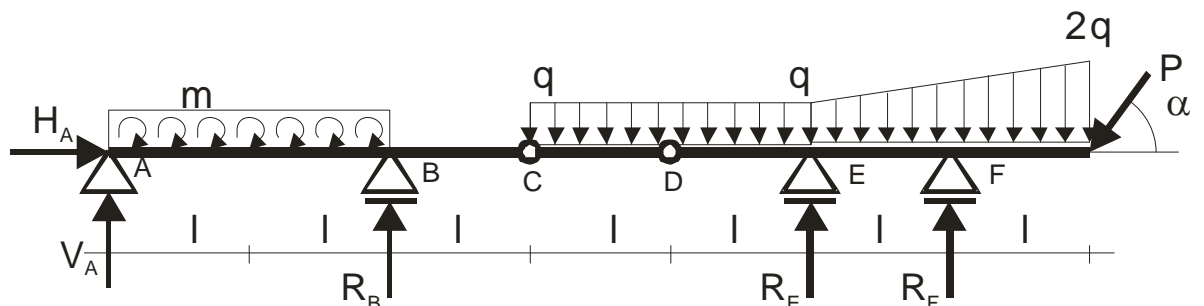


$$\sum X = 0 \quad \sum Y = 0 \quad \sum M_A = 0$$

$$\sum X = 0 \quad \sum Y = 0 \quad \sum M_D = 0$$

11

Reakcje – belki przegubowe (3)



$$\sum X : H_A - P \cos \alpha = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B + R_E + R_F - q \cdot 4l - \frac{1}{2} q \cdot 2l - P \sin \alpha = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot 2l + R_E \cdot 5l + R_F \cdot 6l - m \cdot 2l - q \cdot 4l \cdot 5l - \frac{1}{2} q \cdot 2l \cdot \left(5l + \frac{2}{3} 2l \right) - P \sin \alpha \cdot 7l = 0$$

$$\sum M_C^l : V_A \cdot 3l + R_B \cdot l + m \cdot 2l = 0$$

$$\sum M_D^p : R_E \cdot l + R_F \cdot 2l - q \cdot 3l \cdot 1,5l - \frac{1}{2} q \cdot 2l \cdot \left(l + \frac{2}{3} 2l \right) - P \sin \alpha \cdot 3l = 0$$

12

Sąsiadujące przeguby – łatwość rozwiązania

- Równania względem sąsiadujących przegubów lepiej zapisać z tej samej strony.

$$\sum X : H_A - P \cos \alpha = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B + R_E + R_F - q \cdot 4l - \frac{1}{2} q \cdot 2l - P \sin \alpha = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot 2l + R_E \cdot 5l + R_F \cdot 6l - m \cdot 2l - q \cdot 4l \cdot 5l - \frac{1}{2} q \cdot 2l \cdot \left(5l + \frac{2}{3} 2l \right) - P \sin \alpha \cdot 7l = 0$$

$$\sum M_C' : V_A \cdot 3l + R_B \cdot l + m \cdot 2l = 0$$

$$\sum M_D'' : R_E \cdot l + R_F \cdot 2l - q \cdot 3l \cdot 1,5l - \frac{1}{2} q \cdot 2l \cdot \left(l + \frac{2}{3} 2l \right) - P \sin \alpha \cdot 3l = 0$$

$$\sum M_D' : V_A \cdot 4l + R_B \cdot 2l + m \cdot 2l - q \cdot l \cdot \frac{1}{2} l = 0$$

13

Rozwiązanie

$$P = 10 \text{ kN}$$

$$q = 5 \text{ kN} / \text{m}$$

$$m = 5 \text{ kNm} / \text{m}$$

$$l = 1 \text{ m}$$

$$H_A = 5 \text{ kN}$$

$$V_A = -6,25 \text{ kN}$$

$$R_B = 8,75 \text{ kN}$$

$$R_E = 2,173 \text{ kN}$$

$$R_F = 28,987 \text{ kN}$$

14

Zasady pisania dodatkowych równań dla przegubów ⁽¹⁾

- Dodatkowe równanie względem przegubu musi wykorzystywać własność przegubu, tj. że moment w przegubie równy jest 0, a więc dodatkowe równanie nie może być zwykłą sumą momentów względem przegubu, a musi być sumą momentów od sił z jednej strony przegubu.

15

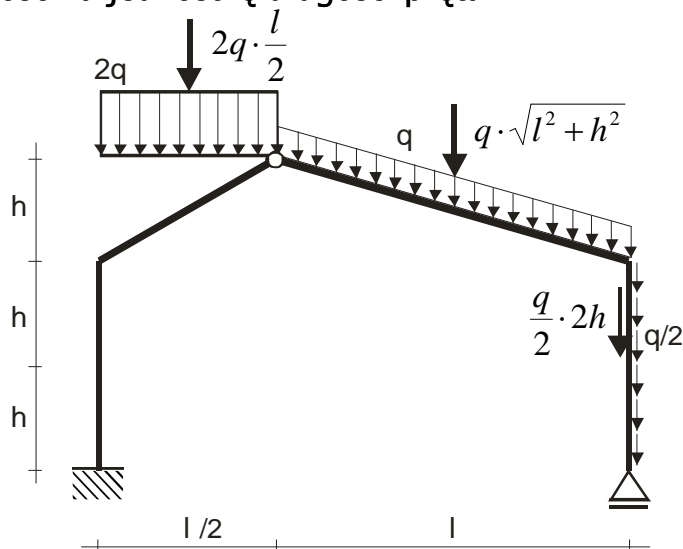
Zasady pisania dodatkowych równań dla przegubów ⁽²⁾

- Każdy przegub musi zostać wykorzystany co najmniej jeden raz.
- Jeżeli chcemy zapisać równanie dla przegubu z drugiej strony, to zastępuje ono jedno z równań podstawowych (sumę momentów względem dowolnego punktu).

16

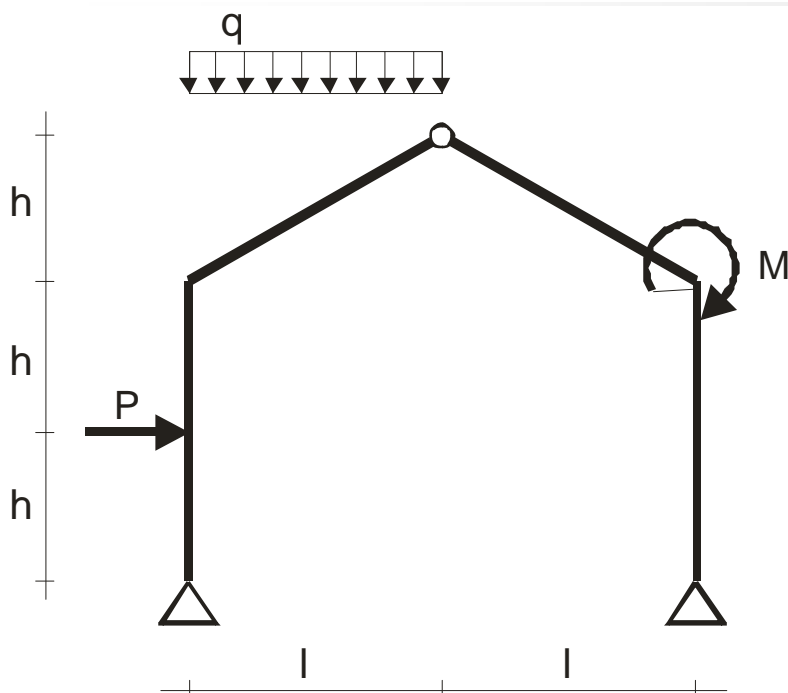
Inne rodzaje obciążeń

- Obciążenie osiowe rozłożone wzdłuż pręta.
- Obciążenie pionowe na pręcie ukośnym:
 - intensywność na jednostkę rzutu;
 - intensywność na jednostkę długości pręta.



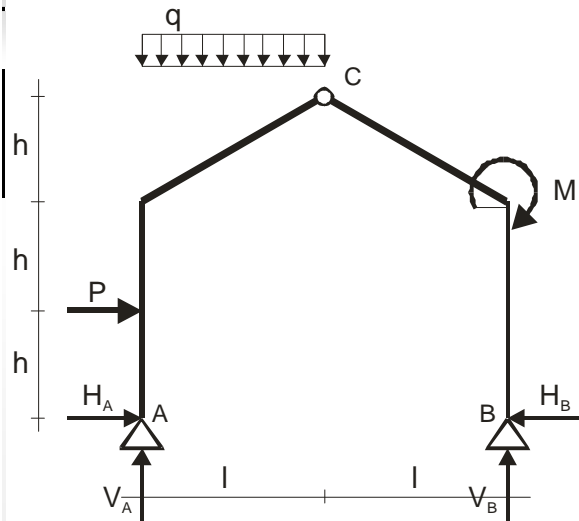
17

Reakcje – rama trójprzegubowa (1)



18

Reakcje – rama trójprzegubowa (2)



$$\sum X : H_A - H_B + P = 0$$

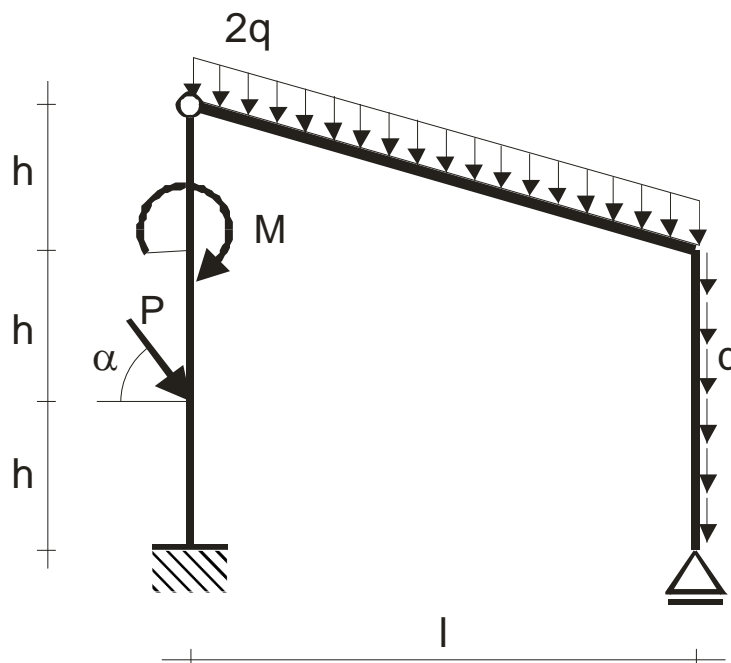
$$\sum Y : V_A + V_B - q \cdot l = 0$$

$$\sum M_B : V_A \cdot 2l + P \cdot h - q \cdot l \cdot \left(l + \frac{1}{2}l \right) + M = 0$$

$$\sum M_C^P : V_B \cdot l - H_B \cdot 3h - M = 0$$

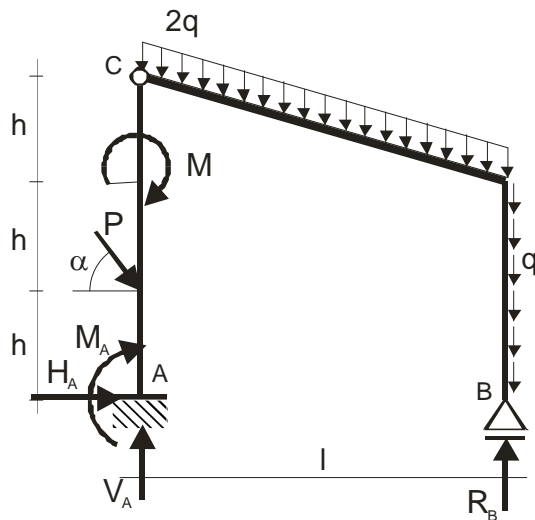
19

Reakcje – rama przegubowa (1)



20

Reakcje – rama przegubowa (2)



$$\sum X : H_A + P \cos \alpha = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B - P \sin \alpha +$$

$$- 2q \cdot \sqrt{l^2 + h^2} - q \cdot 2h = 0$$

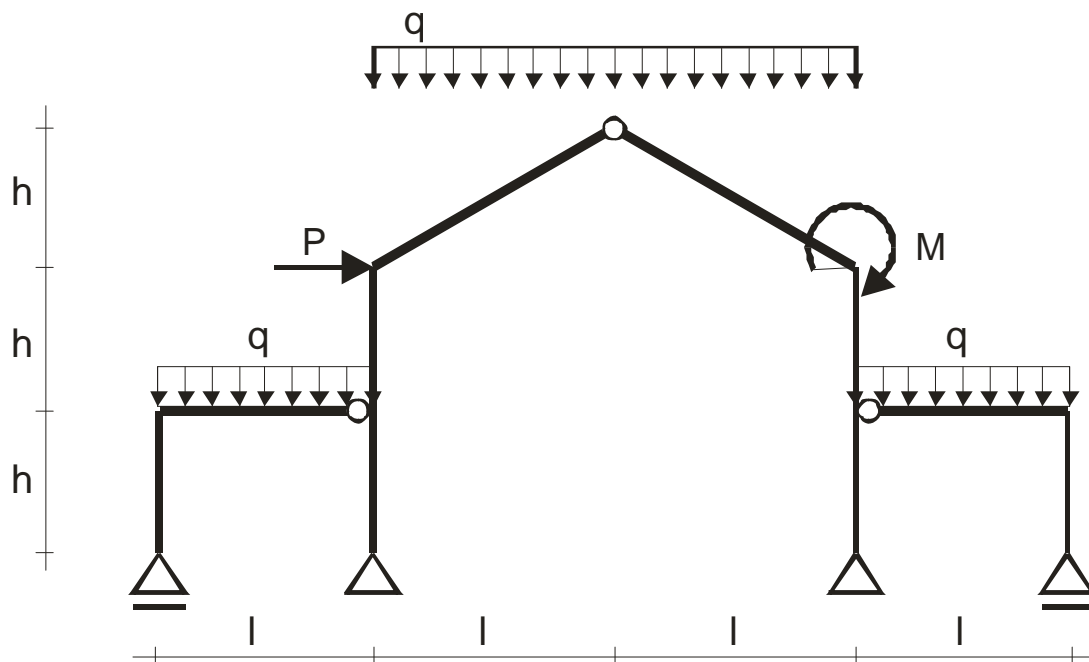
$$\sum M_A : M_A + P \cdot \cos \alpha \cdot h + M +$$

$$+ 2q \cdot \sqrt{l^2 + h^2} \cdot \frac{l}{2} +$$

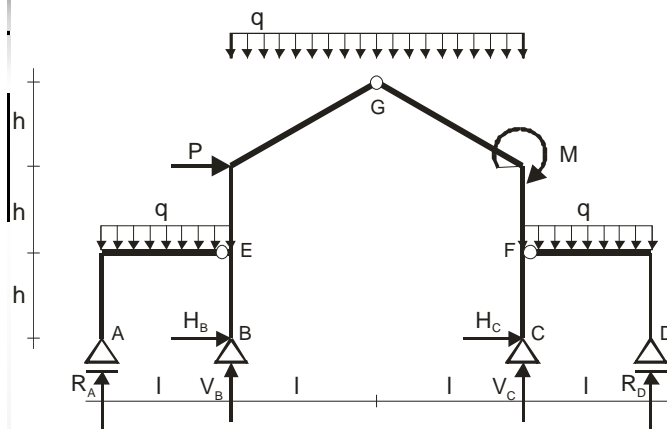
$$+ q \cdot 2h \cdot l - R_B \cdot l = 0$$

$$\sum M_C^P : R_B \cdot l - q \cdot 2h \cdot l - 2q \cdot \sqrt{l^2 + h^2} \cdot \frac{l}{2} = 0 \quad 21$$

Rama nawowa



Rama nawowa – równania równowagi



$$\sum X : H_B + H_C + P = 0$$

$$\sum Y : R_A + V_B + V_C + R_D +$$

$$- q \cdot l - q \cdot 2l - q \cdot l = 0$$

$$\sum M_A : V_B \cdot l + V_C \cdot 3l + R_D \cdot 4l +$$

$$- P \cdot 2h - M - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} +$$

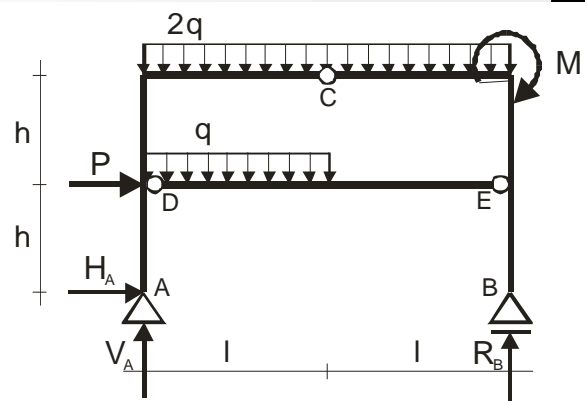
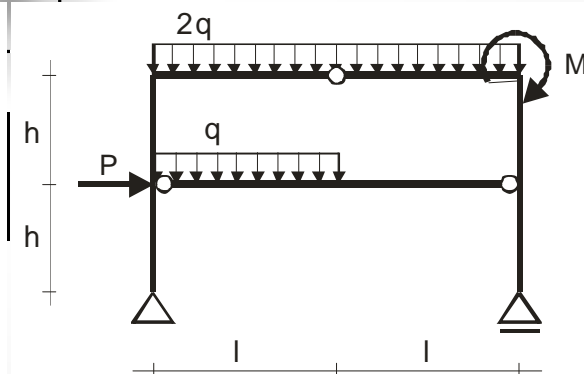
$$- q \cdot 2l \cdot 2l - q \cdot l \cdot 3,5l = 0$$

$$\sum M_G^P : V_C \cdot l + H_C \cdot 3h + R_D \cdot 2l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} - M - q \cdot l \cdot 1,5l = 0$$

$$\sum M_E^L : R_A \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0 \quad \sum M_F^P : R_D \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

23

Rama ze ściągiem – reakcje podporowe (3 niewiadome)



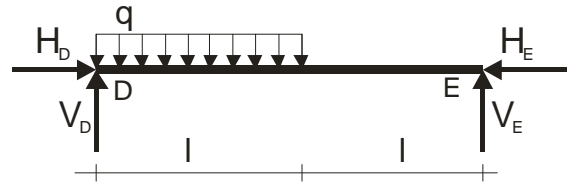
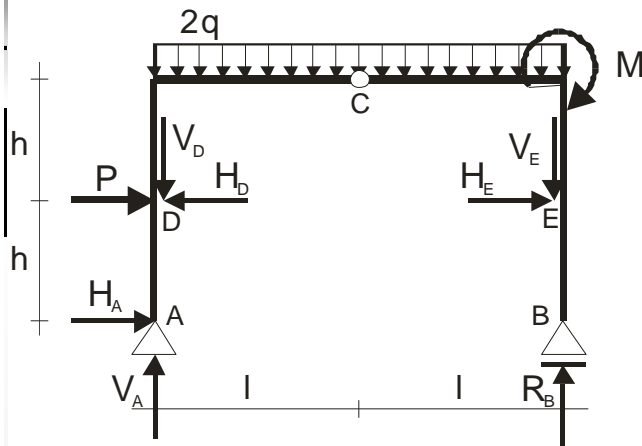
$$\sum X : H_A + P = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B - q \cdot l - 2q \cdot 2l = 0$$

$$\sum M_A : R_B \cdot 2l - P \cdot h - M - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} - 2q \cdot 2l \cdot l = 0$$

24

Siły w ściągu – cztery dodatkowe równania



$$\sum X : H_D - H_E = 0$$

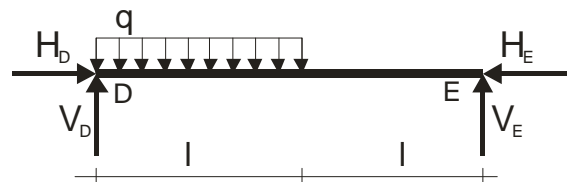
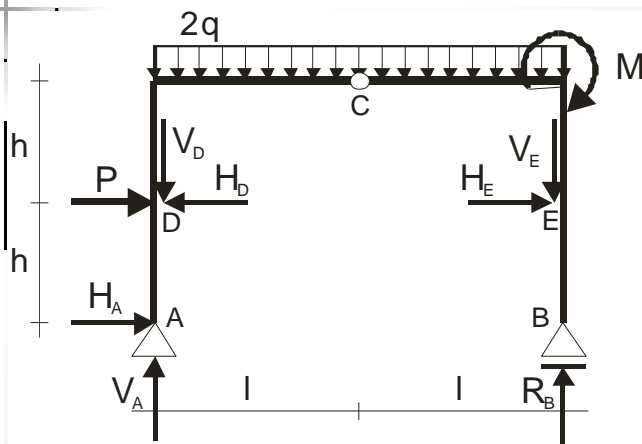
$$\sum Y : V_D + V_E - q \cdot l = 0$$

$$\sum M_D : V_E \cdot 2l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$\sum M_C^P : V_E \cdot l - H_E \cdot h - R_B \cdot l + M + 2q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

25

Rama ze ściągiem – 7 niewiadomych



$$\sum X : H_D - H_E = 0$$

$$\sum Y : V_D + V_E - q \cdot l = 0$$

$$\sum M_D : V_E \cdot 2l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

$$\sum X : H_A - H_D + H_E + P = 0$$

$$\sum Y : V_A + R_B - V_D - V_E - 2q \cdot 2l = 0$$

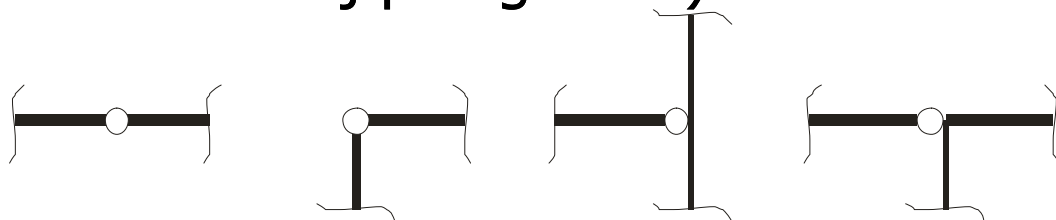
$$\sum M_A : R_B \cdot 2l - P \cdot h - M - 2q \cdot 2l \cdot l - V_E \cdot 2l - H_E \cdot h + H_D \cdot h = 0$$

$$\sum M_C^P : V_E \cdot l - H_E \cdot h - R_B \cdot l + M + 2q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

26

Przeguby pojedyncze

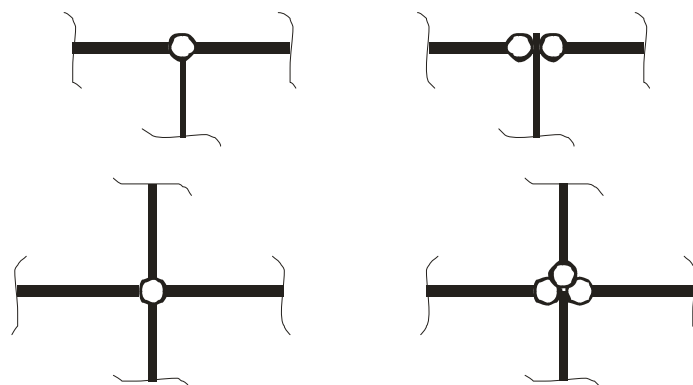
- Przeguby, w których jeden pręt łączy się z drugim ze swobodą obrotu.
- Pozwala na zapisanie jednego dodatkowego równania (sumy momentów względem przegubu od sił na jednej części konstrukcji oddzielonej przegubem).



27

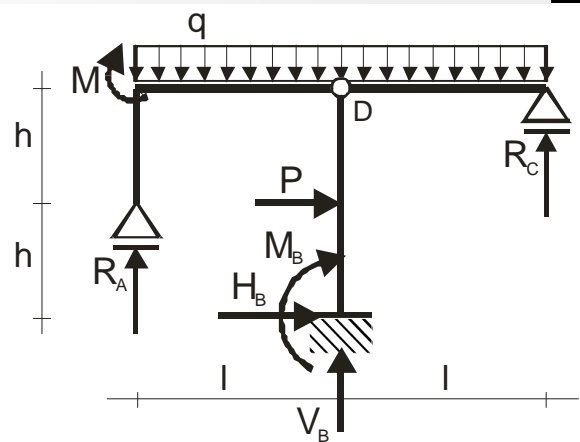
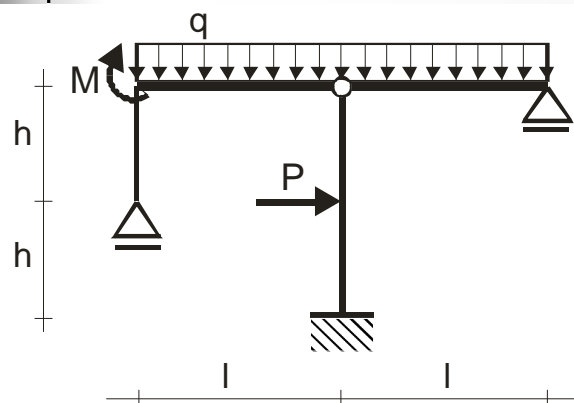
Przeguby wielokrotne

- Przeguby, w których łączą się ze sobą więcej niż dwa pręty ze swobodą obrotu względem pozostałych prętów.
- Pozwalają na zapisanie więcej niż jednego dodatkowego równania równowagi.



28

Rama z przegubem dwukrotnym



$$\sum X : H_B + P = 0$$

$$\sum Y : R_A + V_B + R_C - q \cdot 2l = 0$$

$$\sum M_B : R_A \cdot l + M_B - R_C \cdot l + M - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + P \cdot h = 0$$

$$\sum M_D^P : R_C \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0 \quad \sum M_D^l : R_A \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + M = 0$$