Mechanika ogólna

Wykład nr 5

Statyczna wyznaczalność układu.

Siły wewnętrzne.

Stopień statycznej wyznaczalności

- Stopień zewnętrznej statycznej wyznaczalności n:
  - Belka: n=r-g-rs;
  - Rama: n=r+3o-g-rs;
  - Kratownica: n=r-rs lub n=p-2w.
- Oznaczenia:
  - r – liczba reakcji;
  - g – liczba przegubów pojedynczych;
  - o – liczba pól zamkniętych;
  - rs=3 – liczba równań statyki;
  - p – liczba prętów;
  - w – liczba węzłów.

Stopień statycznej wyznaczalności

- Określenie stopnia statycznej wyznaczalności odnośnie do reakcji:
  – Układ jest **statycznie wyznaczalny**, jeżeli współczynnik n = 0;
  – Układ jest **statycznie niewyznaczalny**, jeżeli współczynnik n > 0;
  – Układ jest **geometrycznie zmienny**, jeżeli współczynnik n < 0.

Sposób podparcia a statyczna wyznaczalność

- Nie zawsze stopień statycznej wyznaczalności n=0 gwarantuje statyczną wyznaczalność.
- Niewłaściwe rozmieszczenie podpór może powodować, że układ będzie geometrycznie zmienny (np. reakcje równoległe – płaszczyzna przesuwu) lub chwilowo geometrycznie zmienny (reakcje przecinające się w jednym punkcie – chwilowy środek obrotu).

Układy geometrycznie zmienne (przykłady) (1)

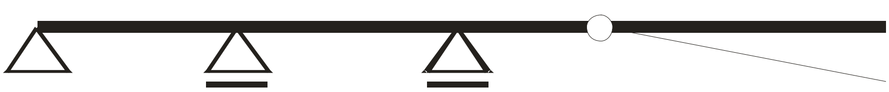
- Niedostateczna liczba podpór.

- Belka na trzech podporach przesuwnych.

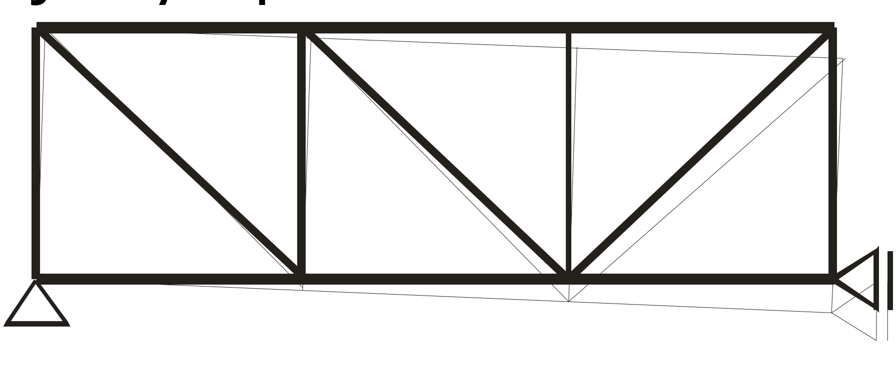
- Trzy niepodparte przeguby obok siebie.

Układy geometrycznie zmienne (przykłady) (2)

- Belka z niepodpartym przęsłem przegubowym.

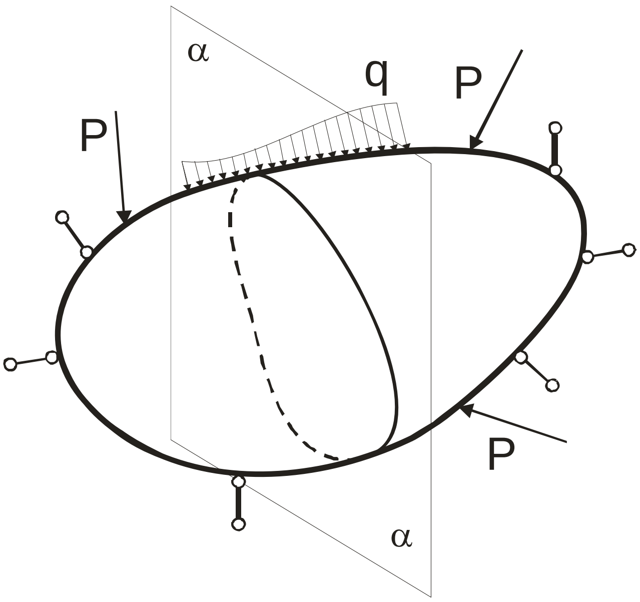


- Trzy reakcje kratownicy przecinające się w jednym punkcie.



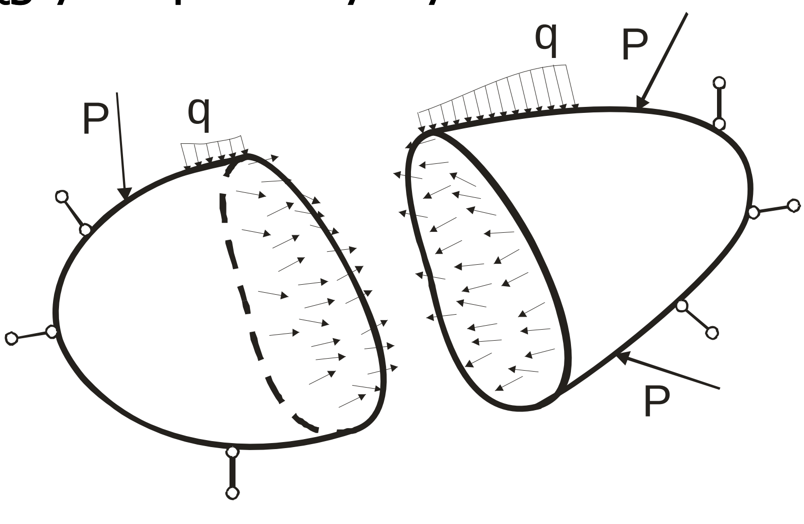
Siły wewnętrzne (1)

- Mamy bryłę materialną obciążoną układem sił (siły zewnętrzne, reakcje), będących w równowadze. Rozetniemy myślowo tę bryłę na dwie części przekrojem α-α .



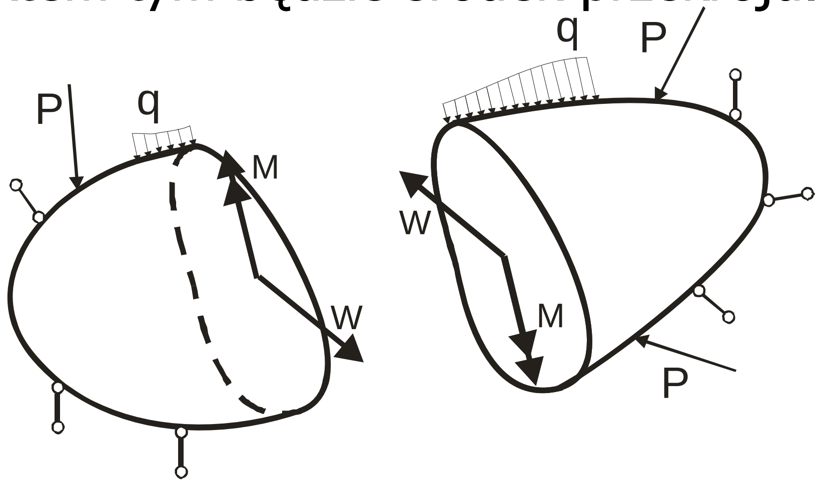
Siły wewnętrzne (2)

- Aby fragment bryły był w równowadze musimy zastąpić wzajemne oddziaływanie fragmentów brył przez przyłożenie w sposób ciągły do płaszczyzny α-α układu sił.



Siły wewnętrzne (3)

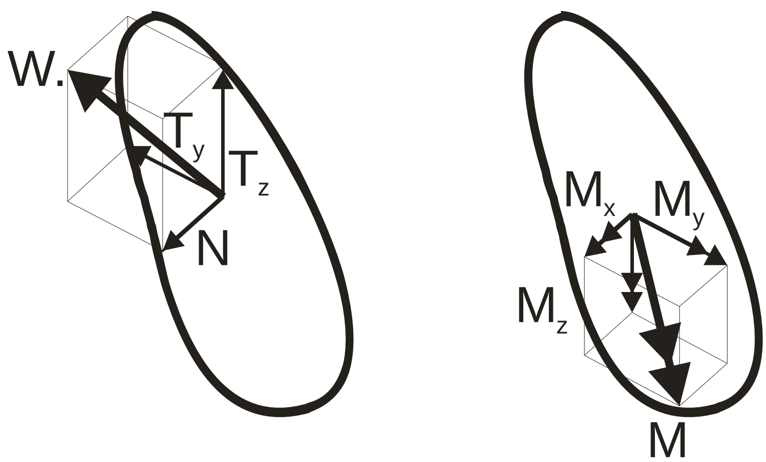
- Siły te można zastąpić przez ich wypadkowe $\overline{\mathbf{W}}$ i $\overline{\mathbf{M}}$, przyłożone w dowolnym punkcie przekroju α-α. W przypadku naszych rozważań punktem tym będzie środek przekroju.



Siły przekrojowe

- Wypadkową siłę $\overline{\mathbf{W}}$ i moment $\overline{\mathbf{M}}$ można wyrazić przez ich składowe:

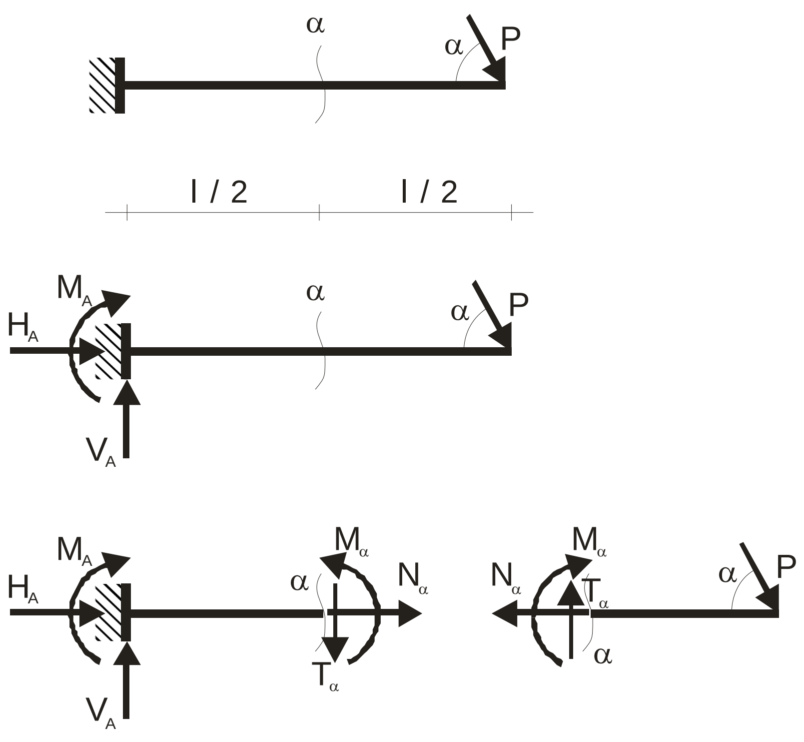
$$\overline{\mathbf{W}} = \overline{\mathbf{N}} + \overline{\mathbf{T}}_y + \overline{\mathbf{T}}_z \qquad \overline{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{M}}_\mathbf{x} + \overline{\mathbf{M}}_\mathbf{y} + \overline{\mathbf{M}}_\mathbf{z}$$



Nazwy sił przekrojowych

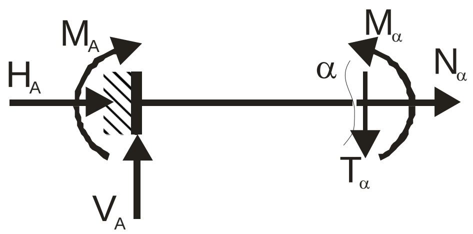
- Wielkości te nazwano:
  - N – siła podłużna (normalne) – wywołuje rozciąganie lub ściskanie;
  - T_y , T_z (lub Q_y , Q_z) – siły poprzeczne (tnące) – wywołują ścinanie;
  - M_x – moment skręcający – wywołuje skręcanie;
  - M_y , M_z – momenty zginające – wywołują zginanie.

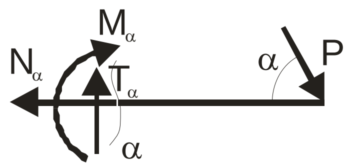
Przykład



Siły wewnętrzne w układach płaskich – definicje (1)

- Siła normalna (osiowa, podłużna) – wzajemne oddziaływanie części konstrukcji przeciwdziałające ich przesunięciu się wzdłuż osi pręta w rozważanym punkcie.

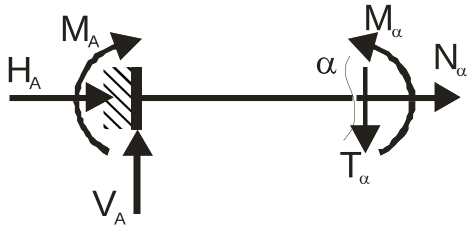


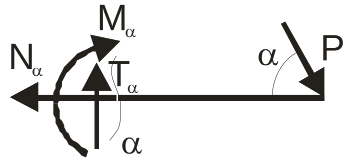


$$N_\alpha = P\cos\alpha$$

Siły wewnętrzne w układach płaskich – definicje (2)

- Siła poprzeczna (tnąca) – wzajemne oddziaływanie części konstrukcji przeciwdziałające ich przesunięciu się poprzecznie do osi pręta w rozważanym punkcie.

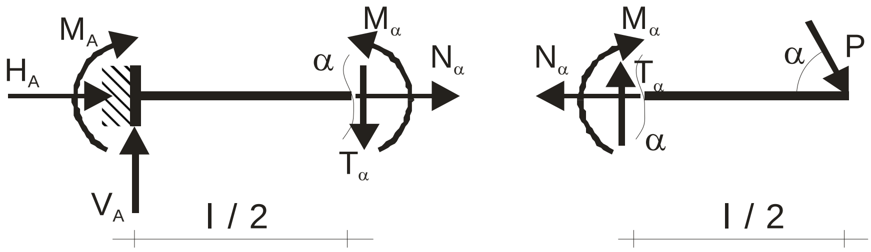




$$T_\alpha = P\sin\alpha$$

Siły wewnętrzne w układach płaskich – definicje (3)

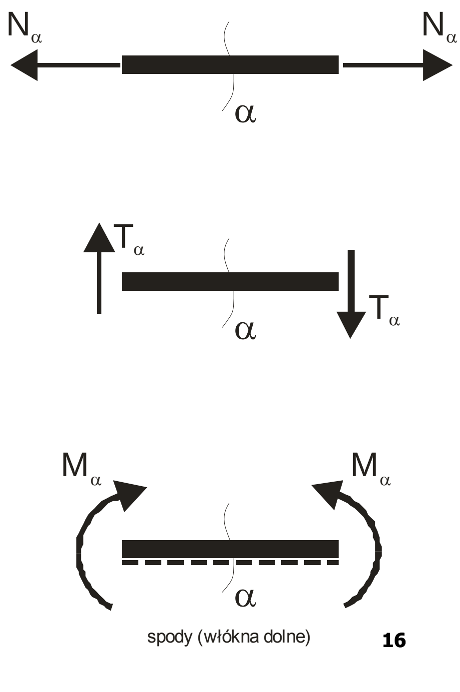
- Moment zginający – wzajemne oddziaływanie części konstrukcji przeciwdziałające ich wzajemnemu obrotowi w rozważanym punkcie.



$$M_\alpha = -P\frac{l}{2}\sin\alpha$$

Siły wewnętrzne – konwencja znaków

- Siła normalna rozciągająca pręt jest dodatnia.
- Siła poprzeczna powodowana przez obciążenie działające po lewej stronie przekroju do góry lub po prawej stronie do dołu jest dodatnia.
- Moment rozciągający włókna dolne jest dodatni.



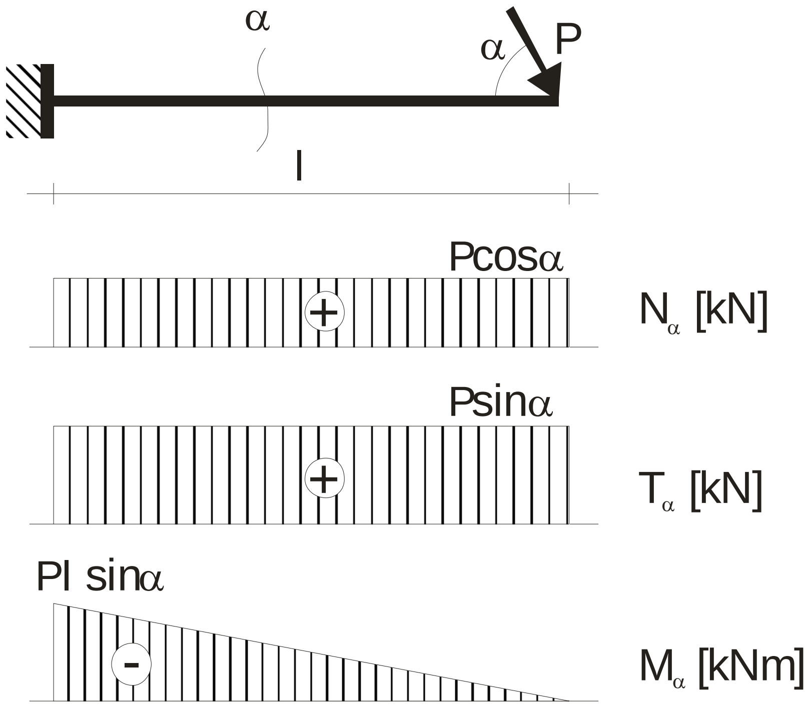
Siły wewnętrzne – wykresy (1)

- Kreskowanie (rzędne wykresu) należy zaznaczać prostopadle do osi pręta.
- Rzędne dodatnie wykresów sił normalnych i tnących odkłada się zazwyczaj u góry.
- Wykresy sił podłużnych i poprzecznych rysujemy ze znakiem.

Siły wewnętrzne – wykresy (2)

- Wykresy momentów nie muszą być znakowane, ale należy zwracać uwagę, aby rzędne momentu odkładać po stronie włókien rozciąganych.
- Rzędne dodatnie wykresu momentów zginających odkłada się u dołu (moment dodatni, gdy rozciągane są włókna dolne).
- Wykres momentu wskazuje jak odkształci się pręt i gdzie, w poszczególnych elementach, włókna są rozciągane.

Wykresy sił wewnętrznych



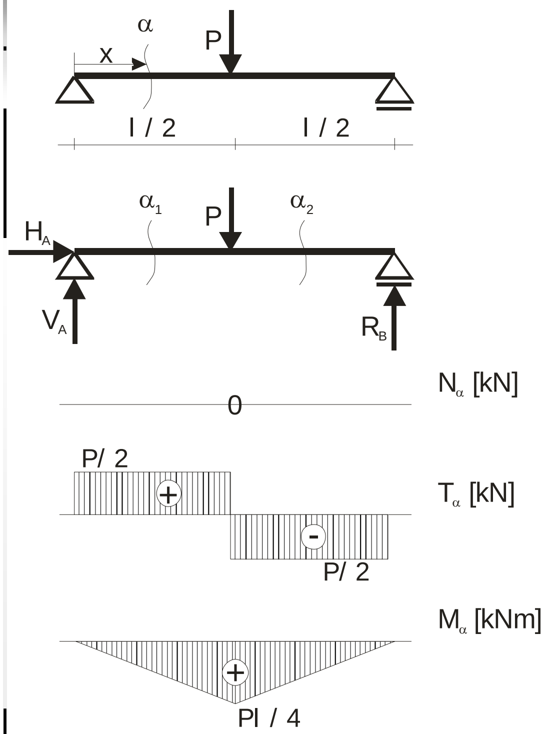
Punkty charakterystyczne, przekroje

- Ze względu na konieczność modyfikacji równań sił wewnętrznych:
  - – w belkach i ramach – końce prętów, punkty przyłożenia sił:
    - – czynnych: siła skupiona, moment skupiony, początek lub koniec obciążenia ciągłego;
    - – biernych: punkty podporowe;
  - – w ramach – dodatkowo węzły (połączenia prętów o różnej krzywiźnie).

Przegub

- Przegub jest jedynie punktem kontrolnym (moment równy jest 0). Nie powoduje on konieczności wprowadzenia dodatkowego przekroju.

Siła skupiona



$$V_A = R_B = \frac{P}{2} \quad H_A = 0$$

$$N_{\alpha 1} = 0 \quad N_{\alpha 2} = 0$$

$$T_{\alpha 1} = V_A = \frac{P}{2} \quad T_{\alpha 2} = V_A - P = -\frac{P}{2}$$

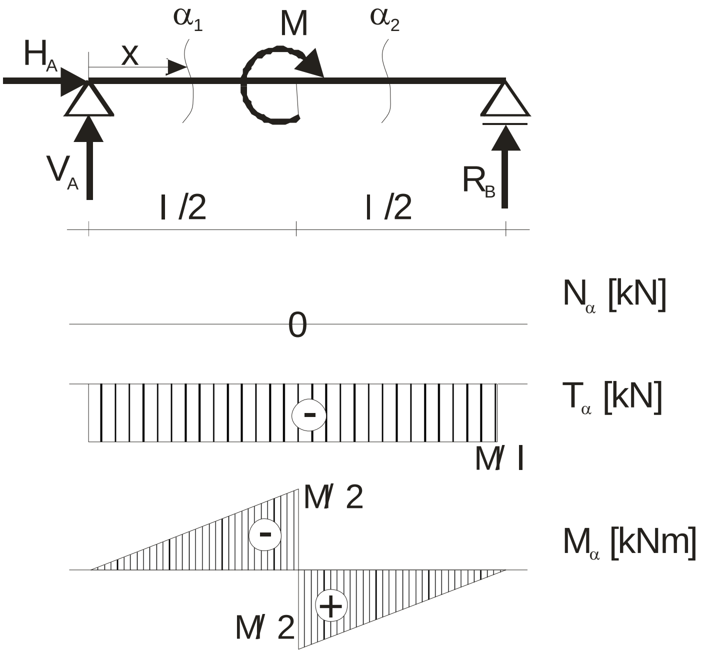
$$M_{\alpha 1} = V_A \cdot x = \frac{P}{2} \cdot x \qquad \left| \begin{array}{ll} x = 0 & M_{\alpha 1} = 0 \\ x = \frac{l}{2} & M_{\alpha 1} = \frac{Pl}{4} \end{array} \right.$$

$$M_{\alpha 2} = V_A \cdot x - P\left(x - \frac{l}{2}\right) =$$

$$= \frac{P}{2} \cdot x - P\left(x - \frac{l}{2}\right) = P\left(\frac{l}{2} - \frac{x}{2}\right)$$

$$\left| \begin{array}{ll} x = \frac{l}{2} & M_{\alpha 2} = \frac{Pl}{4} \\ x = l & M_{\alpha 2} = 0 \end{array} \right.$$

Moment skupiony



$$V_A = -\frac{M}{l} \quad R_B = \frac{M}{l} \quad H_A = 0$$

$$N_{\alpha 1} = 0 \quad N_{\alpha 2} = 0$$

$$T_{\alpha 1} = V_A = -\frac{M}{l} \quad T_{\alpha 2} = -\frac{M}{l}$$

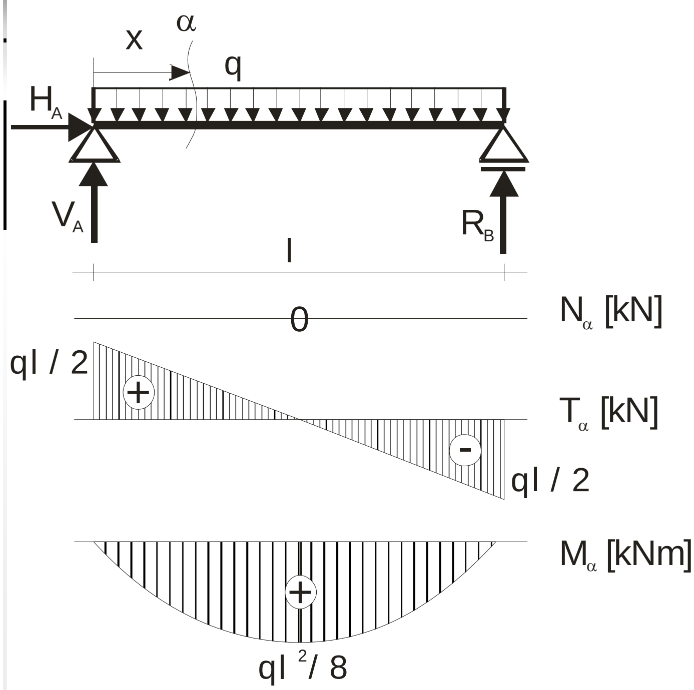
$$M_{\alpha 1} = V_A \cdot x = -\frac{M}{l} \cdot x$$

$$\left| \begin{array}{l} x = 0 \quad M_{\alpha 1} = 0 \\ x = \frac{l}{2} \quad M_{\alpha 1} = -\frac{M}{2} \end{array} \right.$$

$$M_{\alpha 2} = V_A \cdot x + M = M \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{l}{2} \quad M_{\alpha 2} = \frac{M}{2} \\ x = l \quad M_{\alpha 2} = 0 \end{array} \right.$$

Obciążenie ciągłe równomierne



$$V_A = R_B = \frac{ql}{2} \quad H_A = 0$$

$$N_\alpha = 0$$

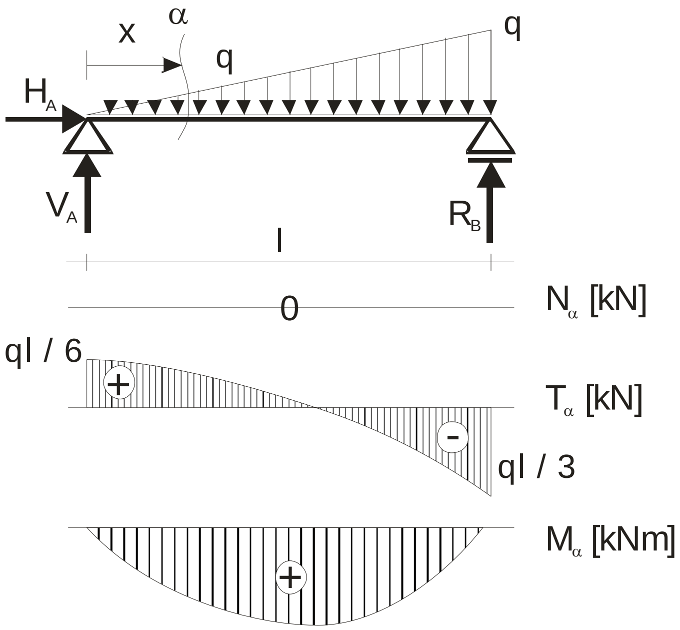
$$T_\alpha = V_A - qx = \frac{ql}{2} - qx$$

$$\left| \begin{array}{l} x = 0 \quad T_\alpha = \frac{ql}{2} \\ x = \frac{l}{2} \quad T_\alpha = 0 \\ x = l \quad T_\alpha = -\frac{ql}{2} \end{array} \right.$$

$$M_\alpha = V_A \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = q \cdot \left(\frac{l \cdot x}{2} - \frac{x^2}{2} \right)$$

$$\left| \begin{array}{l} x = 0 \quad M_\alpha = 0 \\ x = \frac{l}{2} \quad M_\alpha = \frac{q \cdot l^2}{8} \\ x = l \quad M_\alpha = 0 \end{array} \right.$$

Obciążenie ciągłe liniowo zmienne



$$V_A = \frac{ql}{6} \quad R_B = \frac{ql}{3} \quad H_A = 0$$

$$N_\alpha = 0$$

$$q(x) = \frac{q}{l} \cdot x$$

$$T_\alpha = V_A - \frac{1}{2} q(x) \cdot x = \frac{ql}{6} - \frac{1}{2}\frac{qx^2}{l}$$

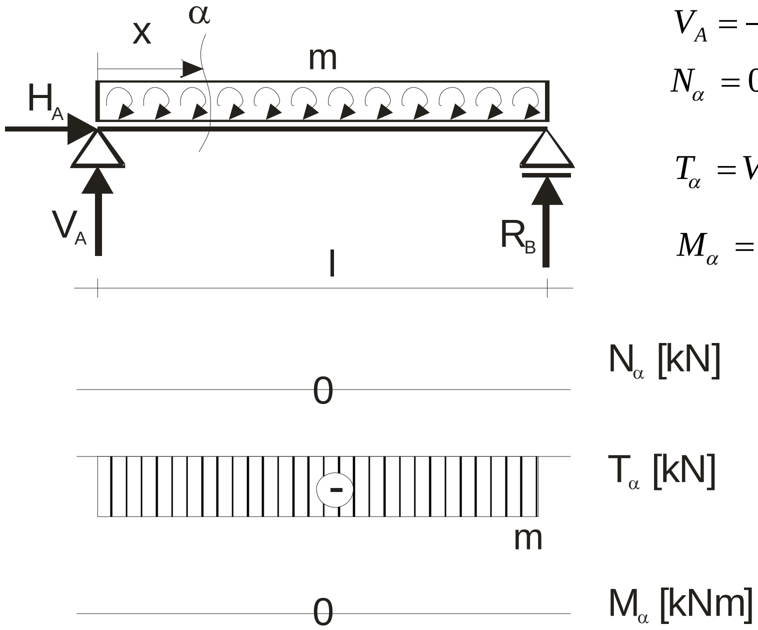
$$\left| \begin{array}{l} x = 0 \quad T_\alpha = \frac{ql}{6} \\ x = l \quad T_\alpha = \frac{ql}{3} \end{array} \right.$$

$$M_\alpha = V_A \cdot x - \frac{1}{2} q(x) \cdot x \cdot \frac{x}{3} =$$

$$= \frac{ql}{6} \cdot x - \frac{1}{2}\frac{qx}{l} \cdot x \cdot \frac{x}{3} = \frac{ql}{6} \cdot x - \frac{1}{6}\frac{q}{l} x^3$$

$$\left| \begin{array}{l} x = 0 \quad M_\alpha = 0 \\ x = l \quad M_\alpha = 0 \end{array} \right.$$

Obciążenie ciągłe momentem



$$V_A = -m \quad V_B = m \quad H_A = 0$$

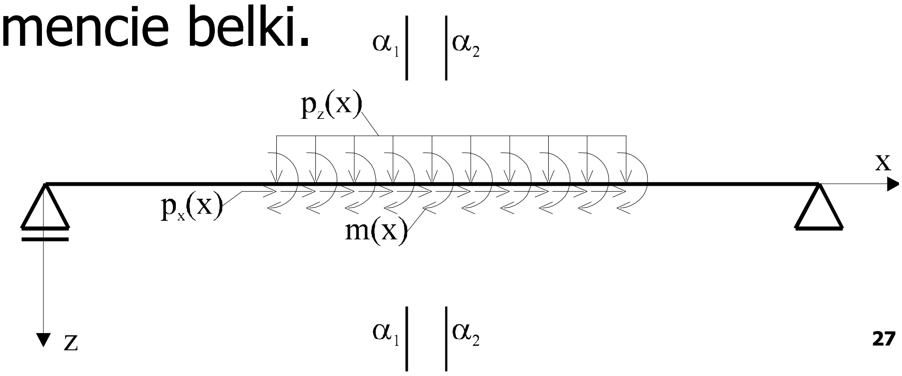
$$N_\alpha = 0$$

$$T_\alpha = V_A = -m$$

$$M_\alpha = V_A \cdot x + m \cdot x = -mx + mx = 0$$

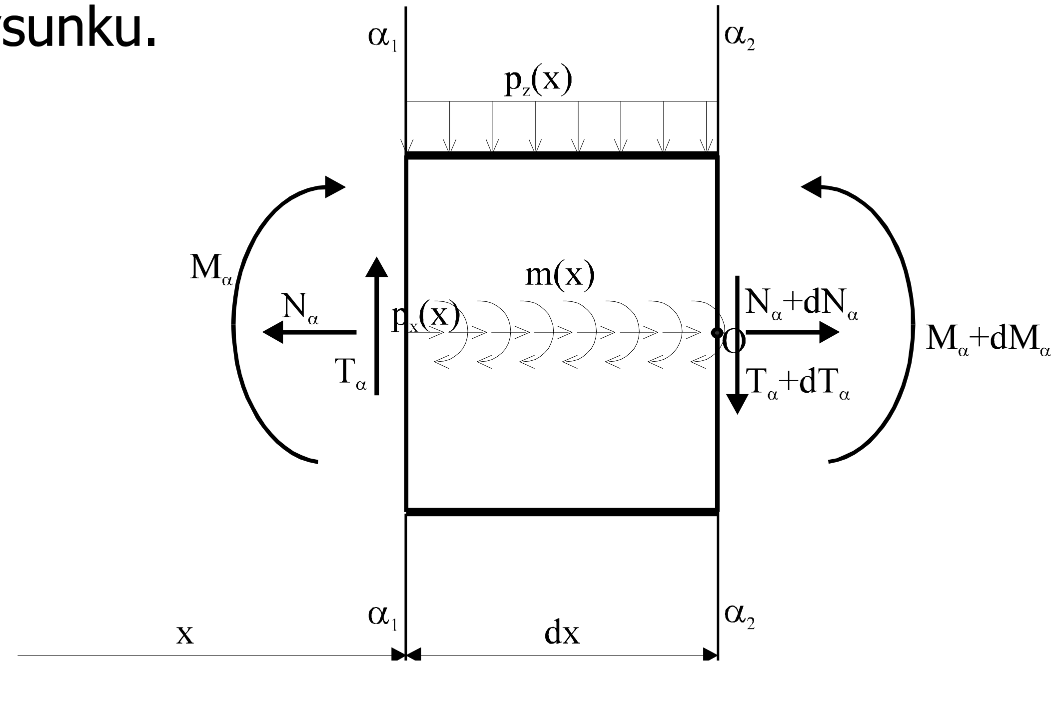
Warunki różniczkowe (1)

- **Zależności różniczkowe** między M_α, T_α, N_α i $p_z(x)$, $p_x(x)$, $m(x)$.
- Aby wyznaczyć te zależności rozważymy belkę swobodnie podpartą, obciążoną obciążeniami ciągłymi i ciągłym momentem na fragmencie belki.



Warunki różniczkowe (2)

Z tej belki wycinamy fragment przedstawiony na rysunku.



Warunki różniczkowe (3)

- Suma rzutów wszystkich sił na oś poziomą *x* :

$$\sum X = 0 \qquad -N_\alpha + p_x(x)dx + (N_\alpha + dN_\alpha) = 0$$

- Suma rzutów wszystkich sił na oś pionową *z* :

$$\sum Z = 0 \qquad -T_\alpha + p_z(x)dx + (T_\alpha + dT_\alpha) = 0$$

- Suma momentów wszystkich sił względem punktu O :

$$\sum M_o = 0$$

$$M_\alpha + T_\alpha dx + m_x(x)dx - p_z(x)dx\frac{dx}{2} - (M_\alpha + dM_\alpha) = 0$$

Warunki różniczkowe (4)

- Po odrzuceniu wielkości małej w porównaniu z pozostałymi $p_z(x)dx\frac{dx}{2}$, otrzymujemy:

$$\frac{dN_\alpha}{dx} = -p_x(x) \qquad \frac{dT_\alpha}{dx} = -p_z(x) \qquad \frac{dM_\alpha}{dx} = T_\alpha + m(x)$$

- Z powyższych równań wynika, że:

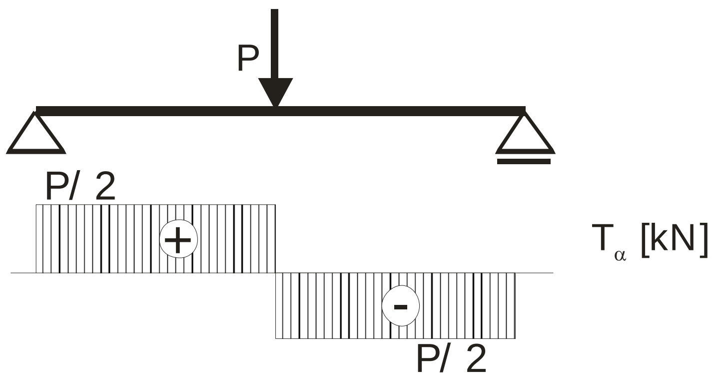
$$\frac{d^2M_\alpha}{dx^2} = \frac{dT_\alpha}{dx} = -p_z(x)$$

Zależności między M_α , T_α oraz q (1)

- Jeżeli w przedziale nie ma obciążenia ciągłego poprzecznego to wykres sił tnących jest stały, równoległy do osi pręta.

$$\frac{dT_\alpha}{dx} = -p(x) = 0$$

$$T_\alpha(x) = C_1 = const$$

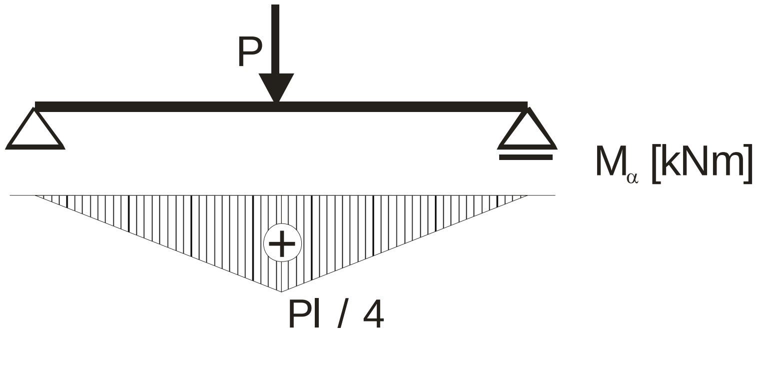


Zależności między M_α , T_α oraz q (2)

- Jeżeli w przedziale nie ma obciążenia ciągłego poprzecznego i nie występuje obciążenie ciągłe momentem to wykres momentu jest linią prostą nachyloną do pręta.

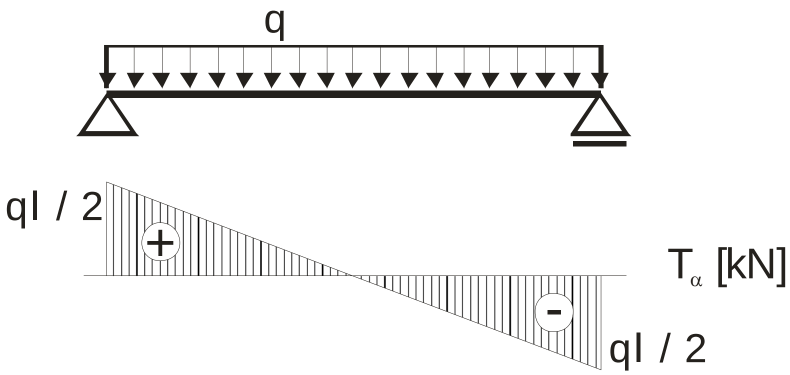
$$\frac{dM_\alpha}{dx} = T_\alpha(x) = C_1$$

$$M_\alpha(x) = C_1 \cdot x + C_2$$



Zależności między
Mα , *T*α oraz *q* (3)

- Jeżeli w przedziale działa stałe obciążenie ciągłe to wykres sił tnących jest nachylony do pręta, rzędne maleją wraz ze wzrostem x.



$$\frac{dT_\alpha}{dx} = -q$$

$$T_\alpha = -qx + C_1$$

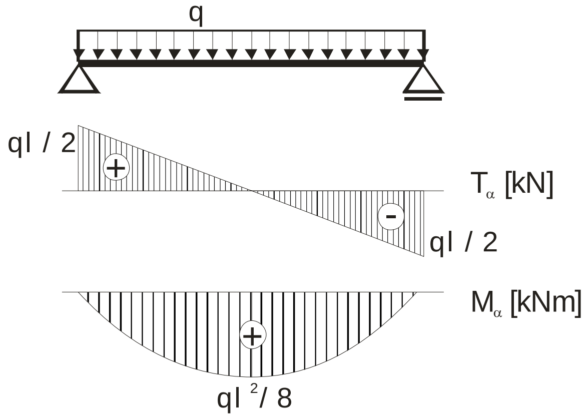
Zależności między
Mα , *T*α oraz *q* (4)

- Jeżeli w przedziale działa stałe obciążenie ciągłe i nie ma obciążenia ciągłego momentem, to wykres momentów zginających jest parabolą drugiego stopnia.

→

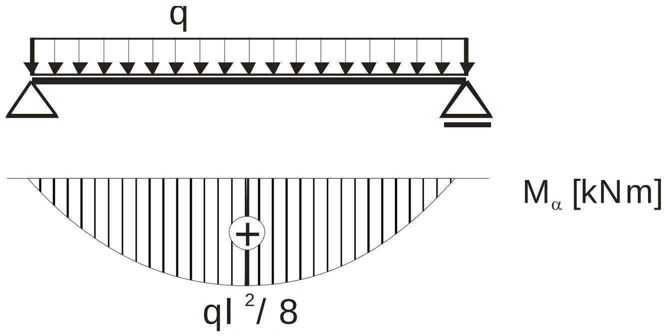
Zależności między M_α , T_α oraz q (5)

- Jeżeli w przedziale zeruje się równanie siły tnącej to wykres momentów osiąga ekstremum w tym punkcie. →



Zależności między M_α , T_α oraz q (6)

- Jeżeli obciążenie ciągłe jest skierowane do dołu, to wypukłość wykresu jest skierowana w dół i odwrotnie.



$$\frac{d^2 M_\alpha}{dx^2} = -p(x) = -q$$

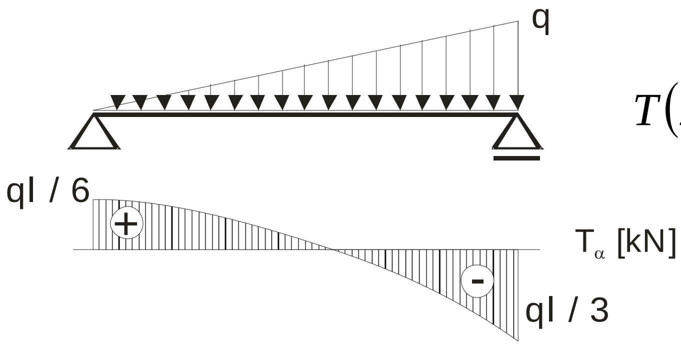
$$\frac{dM_\alpha}{dx} = -qx + C_1$$

$$M(x) = -\frac{1}{2}qx^2 + C_1 x + C_2$$

Zależności między M_α , T_α oraz q (7)

- Jeżeli w przedziale działa obciążenie ciągłe liniowo zmienne i nie ma obciążenia ciągłego momentem to wykres sił poprzecznych jest parabolą drugiego stopnia. W punkcie, gdzie obciążenie ciągłe się zeruje parabola jest styczna do osi do pręta.

$$p(x) = C_1 x + C_2$$



$$T(x) = -\frac{1}{2} C_1 x^2 - C_2 x + C_3$$

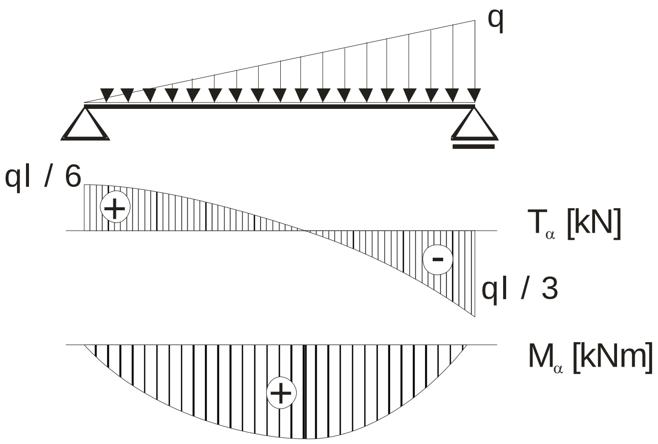
Zależności między M_α , T_α oraz q (8)

- Jeżeli w przedziale działa obciążenie ciągłe liniowe to wykres momentów zginających jest parabolą trzeciego stopnia.

→

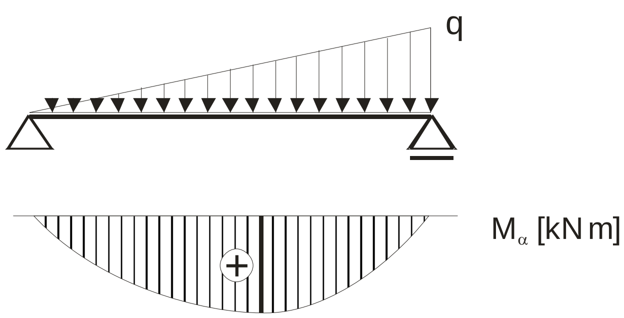
Zależności między M_α , T_α oraz *q* (9)

- Jeżeli równanie sił tnących zeruje się w przedziale, to wykres momentów osiąga ekstremum w tym punkcie. →



Zależności między M_α , T_α oraz *q* (10)

- Jeżeli obciążenie ciągłe jest skierowane do dołu, to wypukłość wykresu jest skierowana w dół i odwrotnie.



$$p(x) = C_1 x + C_2$$

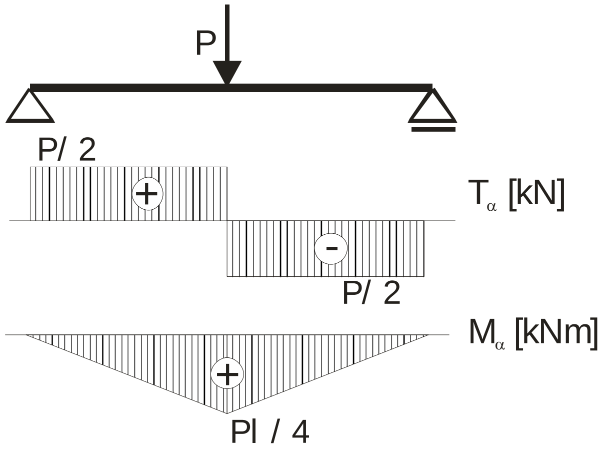
$$\frac{d^2 M_\alpha}{dx^2} = -p(x) = -C_1 x - C_2$$

$$\frac{dM_\alpha}{dx} = -\frac{1}{2} C_1 x^2 - C_2 x + C_3$$

$$M(x) = -\frac{1}{6} C_1 x^3 - \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

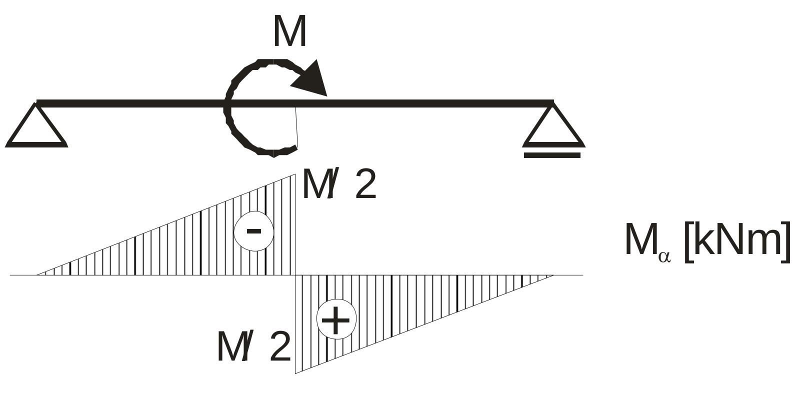
Zależności między M_α , T_α oraz *q* (11)

- Jeżeli na pręcie występuje siła skupiona, to na wykresie sił poprzecznych wystąpi „skok” o tą wartość, a na wykresie momentów zginających wystąpi „załamanie” wykresu.



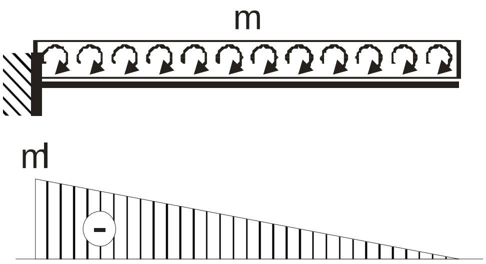
Zależności między M_α , T_α oraz *q* (12)

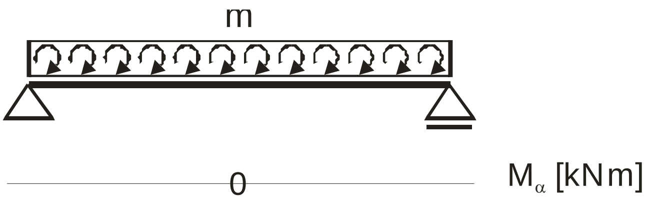
- Jeżeli na pręcie występuje moment skupiony, to na wykresie momentów zginających wystąpi „skok” o wartość tego momentu.



Zależności między
Mα , Tα oraz *q* i *m* (13)

- Jeżeli w przedziale działa obciążenie ciągłe momentem to wykres momentów zginających jest liniowy (liniowo zmienny lub w szczególnym przypadku stały, gdy T_α=-m).





$$\frac{dM_\alpha}{dx} = T_\alpha + m(x)$$

Zależności między
Mα , Tα oraz *q* (14)

Obciążenie	Wykres T	Wykres M
Brak obc. ciągłego	stały	prosta
Obc. ciągłe stałe	prosta	parabola 2°
Obc. ciągłe trójkątne	parabola 2°	parabola 3°
Siła skupiona	skok	załamanie
Moment skupiony	–	skok
Obc. ciągłe momentem	–	prosta